**Université François-Rabelais de Tours** **M1 Mathématiques**
**2018-2019** **Probabilités-2**

**Controle continu Rattrapage**

---

**Exercice 1** Soit $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire centré de matrice de covariance $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Montrer que $X_2 = 3X_1$ p.s.

**Exercice 2** Soient les entiers $n, n_1, n_2 \geq 0$ tels que $n_1 + n_2 = n$. On considère les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ définis par $\vec{e}_j = (e_{i,j})$ où $e_{i,1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n$ et

$$e_{i,2} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n_1 \\ -1 & \text{si} \quad n_1 + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

1) Étude théorique

a) Soit $B$ la matrice de vecteurs colonnes $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Calculer la matrice $B^*B$ et la matrice $(B^*B)^{-1}B^*$.

b) Soient $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, et $\vec{X}$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(B\vec{\lambda}, \sigma^2 I_n)$. On note $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses coordonnées. Soit $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$ défini par $\hat{\Lambda} = (B^*B)^{-1}B^*X$. Donner les expressions de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ en fonction des variables aléatoires $\overline{X_1} = \dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} X_i$ et $\overline{X_2} = \dfrac{1}{n_2}\displaystyle\sum_{i=n_1+1}^{n} X_i$.

c) Donner les lois de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

d) A quelle condition les variables aléatoires $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont-elles indépendantes ?

e) Donner l'expression de $\hat{X} = B\hat{\Lambda}$ en fonction des variables aléatoires $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$.

f) Quelle est la loi de $\hat{X}$ ?

g) Quelle est la loi de $\vec{X} - \hat{X}$ ? Préciser le rang de sa matrice de covariance.

h) Les vecteurs aléatoires $\vec{X} - \hat{X}$ et $\hat{X}$ sont-ils indépendants ?

i) On note $(\hat{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées du vecteur aléatoire $\hat{X}$. Les vecteurs aléatoires $((X_i - \hat{X}_i)^2)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\hat{X}_i^2)_{1 \leq i \leq n}$ sont-ils des vecteurs gaussiens ? sont-ils indépendants ?

j) Donner l'expression de $\|\vec{X} - \hat{X}\|^2$ en fonction des variables aléatoires

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i - \overline{X_1}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=n_1+1}^{n}\left(X_i - \overline{X_2}\right)^2.$$

k) Quelle est la loi de $\|\vec{X} - \hat{X}\|^2$ ?

l) Les variables aléatoires $\|\vec{X} - \hat{X}\|^2$ et $\hat{B}$ sont-elles indépendantes ?

On note $I$ l'intervalle de confiance de niveau $\alpha \in ]0, 1[$ sur le paramètre $b$.

m) Quelle est la statistique $T$, de loi de Student, permettant le calcul de $I$.

n) Donner l'expression des bornes de $I$.

On note $J_i$ l'intervalle de confiance de niveau $\alpha \in ]0, 1[$ sur $E(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

o) Quelle est la statistique $T_i$, de loi de Student, permettant le calcul de $J_i$.

p) Donner l'expression des bornes de $J_i$.

2) Application numérique

Afin de comparer deux engrais $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ on reléve la taille moyenne $x$ de 3 plantes traitées avec chaque engrais ($n_1 = n_2 = 3$). Les observations sont données dans le tableau suivant

| Plante $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Engrais | $\mathcal{E}_1$ | $\mathcal{E}_1$ | $\mathcal{E}_1$ | $\mathcal{E}_2$ | $\mathcal{E}_2$ | $\mathcal{E}_2$ |
| Taille $x_i$ | $1,3$ | $1,9$ | $1,3$ | $0,3$ | $1,6$ | $0,2$ |

On donne

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 9,68, \ \sum_{i=1}^{3} x_i = 4,5, \ \sum_{i=4}^{6} x_i = 2,1$$

a) Calculer la valeur $\hat{a}$ prise par l'estimateur $\hat{A}$ de $a$.

b) Calculer la valeur $\hat{b}$ prise par l'estimateur $\hat{B}$ de $b$.

c) Déduire les évaluations $\hat{x}_i$, $i = 1, \ldots, 6$ de la taille moyenne des plantes pour chaque engrais.

d) Calculer le résidus $\|\vec{x} - \hat{x}\|^2$ du modèle.

e) Donner son nombre de degrés de liberté.

On note $I = [c;\ d]$ l'intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha = 0,9$ pour le coefficient $b$.

f) Déterminer le fractile de la loi de Student intervenant dans la calcul de $I$.

g) Déterminer $c$.

h) Déterminer $d$.

i) D'après cette étude, peut-on penser qu'un engrais favorise plus la croissance que l'autre (expliciter le critère pris utilisé).

**Fractiles $t_n(p)$ de la loi de STUDENT à $n$ degrés de liberté.**

| | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 | 0,999 | 0,9995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n= 2 | 0,289 | 0,617 | 1,061 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,327 | 31,599 |
| n= 3 | 0,277 | 0,584 | 0,978 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,215 | 12,924 |
| n= 4 | 0,271 | 0,569 | 0,941 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 |
| n= 5 | 0,267 | 0,559 | 0,920 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 5,893 | 6,869 |
| n= 6 | 0,265 | 0,553 | 0,906 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 |
| n= 7 | 0,263 | 0,549 | 0,896 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,408 |
| n= 8 | 0,262 | 0,546 | 0,889 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 |
| n= 9 | 0,261 | 0,543 | 0,883 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 |
| n= 10 | 0,260 | 0,542 | 0,879 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 |