Université François-Rabelais de Tours | **M1 Mathématiques**
2018-2019 | **Probabilités-2**

Controle continu 1

Exercice 1 Soit $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire centré de matrice de covariance $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $X_1 = X_2$ p.s.

Exercice 2 Soit $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire centré de matrice de covariance $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une matrice A et un vecteur aléatoire $\vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ tels que $\vec{X} = A\vec{Z}$ et $\Gamma_Z = Id$.
2) Si $\vec{X}$ est un vecteur gaussien, que peut-on dire de plus sur la loi de (Z_1, Z_2).

Exercice 3 Soient les entiers $n, n_1, n_2 \geq 0$ tels que $n_1 + n_2 = n$. On considère les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ définis par $\vec{e}_j = (e_{i,j})$ où $e_{i,1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n$ et

$$e_{i,2} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n_1 \\ -1 & \text{si} \quad n_1 + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

1) Soit B la matrice de vecteurs colonnes $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Calculer la matrice B^*B et la matrice $(B^*B)^{-1}B^*$.
2) Soient $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, et $\vec{X}$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(B\vec{\lambda}, \sigma^2 I_n)$. On note $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ ses coordonnées. Soit $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$ défini par $\hat{\Lambda} = (B^*B)^{-1}B^*X$. Donner les expressions de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ en fonction des variables aléatoires $\overline{X_1} = \dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} X_i$ et $\overline{X_2} = \dfrac{1}{n_2}\displaystyle\sum_{i=n_1+1}^{n} X_i$.
3) Donner les lois de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.
4) A quelle condition les variables aléatoires $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont-elles indépendantes ?
5) Donner l'expression de $\hat{X} = B\hat{\Lambda}$ en fonction des variables aléatoires $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$.
6) Quelle est la loi de $\hat{X}$?
7) Quelle est la loi de $\vec{X} - \hat{X}$? Préciser le rang de sa matrice de covariance.
8) Les vecteurs aléatoires $\vec{X} - \hat{X}$ et $\hat{X}$ sont-ils indépendants ?
9) On note $(\hat{X}_i)_{1\leq i\leq n}$ les coordonnées du vecteur aléatoire $\hat{X}$. Les vecteurs aléatoires $((X_i - \hat{X}_i)^2)_{1\leq i\leq n}$ et $(\hat{X}_i^2)_{1\leq i\leq n}$ sont-ils des vecteurs gaussiens ? sont-ils indépendants ?
10) Donner l'expression de $\|\vec{X} - \hat{X}\|^2$ en fonction des variables aléatoires
$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\big(X_i - \overline{X_1}\big)^2 \qquad \text{et} \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=n_1+1}^{n}\big(X_i - \overline{X_2}\big)^2.$$
11) Quelle est la loi de $\|\vec{X} - \hat{X}\|^2$?
12) Les variables aléatoires $\|\vec{X} - \hat{X}\|^2$ et $\hat{A}$ sont-elles indépendantes ?
13) Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et la fonction F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(\vec{\mu}) = \|\vec{x} - B\vec{\mu}\|^2$. Déterminer son application différentielle $DF_{\vec{\mu}}$ en $\vec{\mu}$.
14) Trouver $\vec{\mu}$ tel que $DF_{\vec{\mu}} = 0$.
15) En déduire la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
16) Vérifier que p.s.
$$\|\vec{X} - B\hat{\Lambda}\| = \inf_{\mu\in\mathbb{R}^2}\|\vec{X} - B\vec{\mu}\|$$