M1 - Chaînes de Markov - 2018/2019 - Rattrapage.

Rappel de notations. Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états S, on introduit les objet suivants :

— Si y est un état, on pose

$$\begin{aligned} T_+^y &= \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \\ T^y &= \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}, \\ N_+^y &= \operatorname{card}\{n \geq 1 : X_n = y\}, \\ N^y &= \operatorname{card}\{n \geq 0 : X_n = y\}. \end{aligned}$$

— Si x et y sont deux états on pose

$$\alpha_{x,y} = \mathbb{P}^x(T_+^y < \infty)$$

et on définit une relation $x \to y$ par

$$x \to y \text{ est vraie si } \alpha_{x,y} > 0.$$

Remarque. Les mesurabilités nécessaires peuvent être énoncées et admises sans démonstration.

Exercice 1. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $S = \{a, b, c\}$ de noyau de transition

$$p = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $\nu = 8\delta_a + 3\delta_b + 5\delta_c$ est une mesure stationnaire.
2. Montrer que cette chaîne admet une unique loi stationnaire μ.
3. Expliciter μ.
4. Pour tout état $s \in S$ on pose $\varphi(s) = \mathbb{E}^s(T^a)$. Expliciter $\varphi(a), \varphi(b)$ et $\varphi(c)$.
5. Pour tout état $s \in S$ on pose $\psi(s) = \mathbb{E}^s(T_+^a)$. Expliciter $\psi(a), \psi(b)$ et $\psi(c)$.

Exercice 2. Soit $X = (X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p sur un espace d'état S. On dit qu'une mesure μ sur S est réversible si, pour tout $x, y \in S$, on a

$$\mu(x)p(x, y) = \mu(y)p(y, x).$$

1. Montrer qu'une mesure réversible est stationnaire.
2. On considère dans cette question le cas où S est de cardinal 2. On écrit

$$p = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. On appelle A le premier état et B le deuxième état.

   (a) À quelle condition sur α et β la chaîne est-elle irréductible ? On se place dans ce cadre dans la suite.

   (b) Montrer que la chaîne admet une unique loi stationnaire μ.

   (c) Expliciter μ.

   (d) On considère la chaîne partant de A. Quelle est la loi de T^B ? Quelle est l'espérance de T^B ? Quelle est l'espérance de T_+^A ?

   (e) La mesure μ est-elle réversible ?
3. Donner un exemple de chaîne de Markov admettant une mesure stationnaire non nulle mais pas de mesure réversible non nulle.

Exercice 3. On lance un dé usuel n fois. On note S_n la somme des résultats obtenus. On s'intéresse à la probabilité p_n que S_n soit multiple de 13. Plus particulièrement, on cherche à montrer que p_n converge et à expliciter sa limite.

1. Modéliser ce problème par une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Étudier cette chaîne pour conclure.

Exercice 4. Donner un exemple de chaîne de Markov irréductible admettant une mesure stationnaire non nulle mais pas de loi stationnaire.

Exercice 5. Soit A une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur $\mathbb{N}$ de noyau p défini par

$$\begin{aligned} p(0,y) &= \mathbb{P}(A=y) \text{ pour } y \geq 0, \\ p(x,x-1) &= 1 \text{ pour } x \geq 1, \\ p(x,y) &= 0 \text{ dans les autres cas.} \end{aligned}$$

De manière informelle, la dynamique à chaque pas de temps est donc la suivante :
— Si la chaîne est n'est pas en 0, elle saute de x en $x-1$.
— Si la chaîne est en 0, elle saute en une copie indépendante de A.

1. Montrer que 0 est un état récurrent.
2. On rappelle que la mesure ν sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\nu(y) = \mathbb{E}^0\left(\sum_{n=0}^{T^0-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right)$$

   est une mesure stationnaire. Montrer, pour tout y,

$$\nu(y) = \mathbb{P}(A \geq y).$$

3. À quelle condition sur A la chaîne est-elle irréductible ? On se place dans cadre dans la suite.
4. Montrer que la chaîne est positivement récurrente si et seulement si A est intégrable.