M1 - Chaînes de Markov - 2018/2019 - CC1.

Rappel de notations. Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états S, on introduit les objet suivants :

— Si y est un état, on pose

$$\begin{aligned} T^y_+ &= \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \\ T^y &= \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}, \\ N^y_+ &= \mathrm{card}\{n \geq 1 : X_n = y\}, \\ N^y &= \mathrm{card}\{n \geq 0 : X_n = y\}. \end{aligned}$$

— Si x et y sont deux états on pose

$$\alpha_{x,y} = \mathbb{P}^x(T^y_+ < \infty)$$

et on définit une relation $x \to y$ par

$$x \to y \text{ est vraie si } \alpha_{x,y} > 0.$$

Remarques. En dehors des questions où l'on demande explicitement d'établir des mesurabilités (les questions sur les temps d'arrêt dans l'exercice 4), on se contentera d'énoncer sans démonstration les mesurabilités dont on aura besoin.

Exercice 1. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $S = \{a, b, c\}$ de noyau de transition

$$p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout état $s \in S$ on pose $\varphi(s) = \mathbb{E}^s(T^a)$. Expliciter $\varphi(a), \varphi(b)$ et $\varphi(c)$. On pourra utiliser la propriété de Markov pour obtenir des relations entre ces différentes quantités.
2. Pour tout état $s \in S$ on pose $\psi(s) = \mathbb{E}^s(T^a_+)$. Expliciter $\psi(a), \psi(b)$ et $\psi(c)$.

Exercice 2. Soit $N \geq 1$. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $S = \{0, \dots, N\}$ de noyau de transition p défini par

$$\forall i, j \in S \quad p(i,j) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Soit $x \in S$. On considère les trois temps d'arrêt

$$T^0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}, \quad T^N = \inf\{n \geq 0 : X_n = N\} \text{ et } T = \min(T^0, T^N).$$

1. Vérifier que p est un bien un noyau de transition.
2. Montrer $\mathbb{E}^x(X_n) = x$ pour tout $n \geq 0$. On pourra procéder par récurrence et calculer, pour tout $n \geq 0$ et tout $i \in S$,
$$\mathbb{E}^x(X_{n+1}1_{X_n=i}).$$
3. On admet que T est fini. En notant que la chaîne reste en 0 si elle touche 0 et qu'elle reste en N si elle touche N, montrer que $\mathbb{E}^x(X_n)$ converge vers $\mathbb{E}^x(N1_{T^N<T^0})$.
4. En déduire $\mathbb{P}^x(T^N < T^0)$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p sur un espace d'état S. Soient x et y deux états. Montrer

$$\mathbb{E}^x(N^y_+) = \alpha_{x,y}\mathbb{E}^y(N^y).$$

Exercice 4. Soit S un espace d'état. On fixe un point x de S. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p sur S issue de x. On suppose que x est un état récurrent. On définit par récurrence une suite $(T_k)_k$ de temps d'arrêts en posant $T_0 = 0$ et, pour tout $k \geq 0$,

$$T_{k+1} = \inf\{n \geq T_k + 1 : X_n = x\}.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$N_n = \mathrm{card}\big(\{1 \leq j \leq n : X_j = x\}\big).$$

1. Soit T une application de l'univers probabilisé sous-jacent dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose, pour tout $n \geq 0$, $\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
2. En déduire que T_k est bien un temps d'arrêt pour tout $k \geq 0$.
3. Soit $k \geq 1$. Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Montrer

$$\mathbb{E}^x \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^{k} t_j (T_j - T_{j-1}) \right) \right] = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}^x \left[\exp \left(i t_j T_1 \right) \right].$$

4. On suppose que T_1 est intégrable. On note μ son espérance. Montrer que T_k/k converge presque sûrement vers une constante que l'on explicitera.
5. En déduire que N_n/n converge presque sûrement vers une constante que l'on explicitera. On pourra démontrer et utiliser le fait que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$T_{N_n} \leq n < T_{N_n + 1}$$

   et commencer par étudier n/N_n.