M1 - Chaînes de Markov - 2018/2019 - CC2.

Rappel de notations. Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états S, on introduit les objet suivants :

— Si y est un état, on pose

$$\begin{aligned} T_+^y &= \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \\ T^y &= \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}, \\ N_+^y &= \mathrm{card}\{n \geq 1 : X_n = y\}, \\ N^y &= \mathrm{card}\{n \geq 0 : X_n = y\}. \end{aligned}$$

— Si x et y sont deux états on pose

$$\alpha_{x,y} = \mathbb{P}^x(T_+^y < \infty)$$

et on définit une relation $x \to y$ par

$$x \to y \text{ est vraie si } \alpha_{x,y} > 0.$$

Remarque. Les mesurabilités nécessaires peuvent être énoncées et admises sans démonstration.

Exercice 1. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $S = \{a, b, c\}$ de noyau de transition

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $\nu = 4\delta_a + 5\delta_b + 4\delta_c$ est une mesure stationnaire.
2. Montrer que cette chaîne admet une unique loi stationnaire μ.
3. Expliciter μ.
4. Pour tout état $s \in S$ on pose $\varphi(s) = \mathbb{E}^s(T^a)$. Expliciter $\varphi(a), \varphi(b)$ et $\varphi(c)$. On pourra utiliser la propriété de Markov pour obtenir des relations entre ces différentes quantités.
5. Pour tout état $s \in S$ on pose $\psi(s) = \mathbb{E}^s(T_+^a)$. Expliciter $\psi(a), \psi(b)$ et $\psi(c)$.

Exercice 2. Soit $X = (X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p sur un espace d'état S. On dit qu'une mesure μ sur S est réversible si, pour tout $x, y \in S$, on a

$$\mu(x)p(x, y) = \mu(y)p(y, x).$$

1. Montrer qu'une mesure réversible est stationnaire.
2. Montrer que si μ est réversible alors, pour toute suite d'états $(x_0, \ldots, x_n)$, on a

$$\mathbb{P}^\mu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}^\mu(X_0 = x_n, X_1 = x_{n-1}, \ldots, X_n = x_0).$$

3. Donner un exemple de chaîne de Markov admettant une mesure stationnaire mais pas de mesure réversible.

Exercice 3. On pose $S = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Soit p un noyau de transition sur S. Soit $X = (X_n)_n$ une chaîne de Markov de noyau p sur S. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) Le noyau p est irréductible (autrement dit, la chaîne X est irréductible).

(ii) Pour tout $x, y, i \in S$, on a $p(x, y) = p(x + i, y + i)$.

1. Montrer que l'on a, pour tout $x, y \in S$, $p(x, y) = p(0, y - x)$.
2. Donner un exemple d'un tel noyau.
3. Montrer que X admet une unique loi stationnaire μ.
4. Expliciter μ. Indication : on peut deviner μ.
5. Que vaut $\mathbb{E}^0(T_+^0)$?

Exercice 4. Soit $X = (X_n)_n$ une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$. Autrement dit X est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de noyau de transition défini par $p(x, y) = 1/2$ si $|x - y| = 1$ et $p(x, y) = 0$ sinon.

1. Soit $s \in [0, 1]$. Montrer
$$\mathbb{E}^0 \left(s^{T_2}\right) = \mathbb{E}^0 \left(s^{T_1}\right) \mathbb{E}^1 \left(s^{T_2}\right).$$
2. On définit $Y = (Y_n)_n$ en posant $Y_n = X_n - 1$ pour tout n. Que dire de la loi de Y si X est chaîne de noyau p issue de 1 ?
3. En déduire
$$\mathbb{E}^0 \left(s^{T_2}\right) = \left[\mathbb{E}^0 \left(s^{T_1}\right)\right]^2.$$
4. Question vague : quelles hypothèses sur p a-t-on réellement utilisées ? Autrement dit, quelles hypothèses formuler sur p (noyau d'une chaîne sur $\mathbb{Z}$) pour que l'argumentation ci-dessus reste valide sans changement majeur ?

Exercice 5. Rappeler la définition de la tribu produit $\mathcal{P}(S)^{\otimes \mathbb{N}}$ sur $S^{\mathbb{N}}$ et montrer qu'une application à valeurs dans $S^{\mathbb{N}}$ muni de cette tribu est mesurable si et seulement si chacune de ses composantes est mesurable.