Analyse Complexe -Session 2 , durée : 3h

Notations : Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(z_0, R)$ le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon R.

Exercice 1. On pose $\Delta = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et pour $z \in \Delta$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{cos(iz)}{z^2 - n^2}$$

1. Montrer que cette relation définit bien une application sur Δ.
2. Montrer que Δ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et que $f \in \mathcal{H}(\Delta)$.

Exercice 2. On considère les applications f et g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
définies par

$$f(z) = \cos(z) - 5z^2 \quad \text{et} \quad g(z) = z^2(\cos(z) - 5z^2)$$

1. Combien de zéros (comptés avec multiplicité) l'application f admet-elle dans $D(0, 1)$?
2. Même question pour g.

Exercice 3. Soient$f$ et g deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas dans un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour $|z| = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $f = \lambda g$ sur Ω. La conclusion est-elle encore vraie si on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas ?

Exercice 4.
Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et appliquer la méthode des résidus afin de déterminer leur valeur :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

et

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\, dx \quad .$$

Problème :

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty \ .$$

L'objectif de ce problème est de montrer que f est une application polynomiale.

1. Montrer l'existence d'un réel $R > 0$ tel que $D(0, R)$ contient tous les zéros de f.
2. Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros.
3. Montrer que la multiplicité de chacun de ces zéros est finie. On note $z_1, .., z_n$ ces zéros et $m_1, .., m_n$ leur multiplicité. On pose $Z = \{z_1, .., z_n\}$ et $m = m_1 + .. + m_n$.
4. Montrer que l'application g de $\mathbb{C} \setminus Z$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{(z - z_1)^{m_1}...(z - z_n)^{m_n}}{f(z)}$$

   se prolonge en une application holomorphe h sur $\mathbb{C}$.
5. Déterminer

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|h(z)|}{|z|^m} \ .$$

6. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|h(z)| \leq C(1 + |z|^m) \ .$$

7. Montrer que h est une application polynomiale.
8. Conclure.