**Analyse Complexe CC2, durée : 4h**

Notations : $\mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe $z$. $\partial\Omega$ désigne la frontière topologique d'une partie $\Omega$ de $\mathbb{C}$, c'est à dire $\overline{\Omega}\backslash\mathring{\Omega}$ où $\mathring{\Omega}$ est l'intérieur de $\Omega$.

**Exercice 1**. On pose $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ \mathcal{I}m(z)\mathcal{R}e(z) > 0\}$ et pour $z \in \Delta$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{inz^2}}{z - n(1-i)}$$

1. Montrer que cette relation définit bien une application sur $\Delta$.
2. Montrer que $\Delta$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
3. Etablir l'inégalité suivante :
$$|f'(z)| \leq \frac{2|z|+1}{e^{\mathcal{R}e(z)\mathcal{I}m(z)} - 1}, \quad \forall z \in \Delta\ .$$

**Exercice 2**. Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}\ .$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z) = \lambda\, g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}\ . \tag{1}$$

1. Traiter le cas où $f$ est identiquement nulle.

Dans la suite on suppose que $f$ n'est pas identiquement nulle. On note réciproquement $\Lambda_f$ et $\Lambda_g$ l'ensemble des zéros de $f$ et de $g$ dans $\mathbb{C}$.

2. Montrer que $\Lambda_g \subset \Lambda_f$.
3. Pour tout $z_0 \in \Lambda_g$, montrer que la multiplicité de $z_0$ en tant que zéro de $f$ est supérieure ou égale à celle de $z_0$ en tant que zéro de $g$.
4. En déduire que $f/g$ est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
5. Conclure.

**Exercice 3**.
On note $D = D(0,1)$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.
Soient $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur $D$ et $f \in C(\overline{D})$ telles que $g_n \to f$ uniformément sur $D$. On suppose que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial D$.

1. Montrer que $f$ a un nombre fini $k \in \mathbb{N}$ de zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $\Omega$.
2. Montrer qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $g_n$ a exactement $k$ zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $D$.

**Exercice 4**.
Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et appliquer la méthode des résidus afin de déterminer leur valeur :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin(x)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

et

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/4}}{1+x^3}\,dx \quad .$$

**Problème :**

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des automorphismes du disque unité ouvert $D = D(0,1)$, c'est à dire l'ensemble des bijections biholomorphes de $D$ sur lui-même.

**Question préliminaire :** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Montrer que

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \max_{\partial\Omega} |f(z)| \; .$$

**Partie I :** Soit $\varphi : D \to D$ holomorphe telle que $\varphi(0) = 0$.

1. Pour $0 < r < 1$, montrer que
$$\sup_{z\in D\setminus\{0\}} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r} \; .$$
2. En déduire que
$$|\varphi(z)| \le |z|, \quad \forall z \in D \; .$$
3. Montrer que si, de plus, il existe $z_0 \in D\setminus\{0\}$ tel que $|\varphi(z_0)| = |z_0|$ alors il existe un complexe $\lambda$ de module 1 tel que
$$\varphi(z) = \lambda z, \quad \forall z \in D \; .$$

**Partie II :** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 et $a \in D$, on pose

$$\phi_{\lambda,a}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \; .$$

1. Montrer que $\phi_{1,a} \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$.
2. Déterminer $|\phi_{1,a}(z)|$ pour tout $z \in \partial D$.
3. En déduire que $\phi_{1,a}$ applique $D$ sur lui-même puis que c'est une bijection de $D$ sur lui-même dont on déterminera la bijection réciproque.
4. Conclure que $\phi_{\lambda,a}$ est un automorphisme de $D$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 et tout $a \in D$.

**Partie III :**

1. Soit $\varphi$ un automorphisme de $D$ tel que $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\varphi(z) = \lambda z$.
2. Soit $\varphi$ un automorphisme de $D$. On pose $a = \varphi(0)$. Montrer que $\varphi = \phi_{\lambda,-\overline{\lambda}\,a}$ avec $|\lambda| = 1$ (on pourra composer $\varphi$ avec une application bien choisie et appliquer le 1.).