Université de Tours Année 2018-2019
Master de Mathématiques, S7

Analyse complexe

L'épreuve dure 240 minutes. Les exercices 1, 2, 3 et le problème 4 sont indépendants. Les documents ne sont pas autorisés. des points seront ajoutés si la copie est correcte claire concise ou complète.

Exercice 1.*(séries entières et fonctions holomorphes)*

1. petit échauffement : calculer le rayon de convergence de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2^n}}{2^n}$$
2. Quel est le rayon de convergence R_{cv} de la série :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-z)^{n+1}}{(n+1)^2 n!}$$
3. La série précédente définit une fonction holomorphe -notée f- sur le disque $D(0, R_{cv})$. Pourquoi?
4. Montrer que
$$f'(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$$
5. On pose
$$g(z) := \int_0^1 \frac{1-e^{-tz}}{t} dt$$
Donner son domaine de définition.
6. g est-elle holomorphe ?
7. $g = f$ sur $D(0, R_{cv})$?
8. Soit $h(z)$ une fonction holomorphe entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) et telle que
$$|h(z)| \leq C + D|z|^2$$
où $C, D \in \mathbb{R}$.
Montrer que h est nécessairement un polynôme.
9. Vérifier que
$$|g(z)| \leq |z| + |\frac{z^2}{4}| \qquad \forall z : \Re(z) > 0$$
10. Montrer cependant que g n'est pas un polynôme.

Exercice 2.(*le long des chemins de* $\mathbb{C}$)

1. Calculer l'intégrale suivante le long du carré $C = [1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$:
$$\int_C \bar{z} + \bar{z}z^2 dz$$
2. Calculer l'intégrale suivante le long de la courbe $\gamma : [0,1] \ni t \longrightarrow t + it^3$ de
$$\int_\gamma \cos^2 z dz$$
3. Calculer le long du cercle centré en 3 de rayon 4 et orienté comme vous voulez de
$$\int_\gamma \frac{z-3}{(z-i)(z+2)} dz$$
4. Soit a un réel fixé; on se propose de calculer
$$I_a := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(at) dt$$
en supposant connu que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$
Soit $A > 0$ et soit R_A le rectangle $[A, A+ia, -A+ia, -A]$.
Donner une expression de
$$\int_{R_A} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
5. En faisant tendre $A \longrightarrow +\infty$ calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2 - ita} dt$$
et en déduire I_a.
6. Pour $A > 2$, on note γ_A le chemin composé du chemin $\gamma_A^1 : [-A, A] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ suivi du chemin $\gamma_A^2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ \theta \mapsto Ae^{i\theta}$. Déterminer $Ind_{\gamma_A}(-1-i)$ et $Ind_{\gamma_A}(2i)$. Pour ce dernier, on pourra faire intervenir $Ind_{\Theta_A}(2i)$ où Θ_A est le cercle centré à l'origne de rayon A parcouru dans le sens direct. En déduire
$$\int_{\gamma_A} \frac{1}{z^2 + (1-i)z + (2-2i)} dz\ .$$
7. En faisant tendre $A \to +\infty$, déterminer
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + (1-i)x + (2-2i)} dx\ .$$

Exercice 3. *(Moyenne et extrema)*
Partie 1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f holomorphe sur Ω.

1. En écrivant la formule de la moyenne en $a \in \Omega$ montrer qu'il existe un disque ouvert $D(a,r) \subset \Omega$ tel que
   -soit $\Re(f)$ est constante sur $D(a,r)$.
   -soit il existe 2 suites $(x_n)_{n\in I\!N}$ et $(y_n)_{n\in I\!N}$ contenues dans $D(a,r)$ qui convergent vers a et telles que
   $$\Re(f)(x_n) < \Re(f)(a) < \Re(f)(y_n), \quad \forall n \in I\!N\ .$$
2. En déduire que $\Re(f)$ n'admet pas d'extremum local strict dans Ω.
3. Si on suppose de plus que Ω est connexe, montrer que $\Re(f)$ admet un extremum local dans Ω si et seulement si f est constante sur Ω.

Partie 2 : On appelle polynome harmonique un polynome de la forme :

$$P(z,\bar{z}) = \sum_0^p a_n z^n + \sum_0^q b_n \bar{z}^n$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z_0 + Re^{it})^n dt$$
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\overline{z_0 + Re^{it}})^n dt$$
3. En déduire qu'un polynome harmonique vérifie le théorème de la moyenne.

Problème *(Combinons à l'aide des complexes!)*
On notera $E_0 := \emptyset, \quad E_n = \{1, 2, \cdots, n-1, n\}$ si $n \geq 1$.
On note p_n le nombre de partitions de E_n. Une partition de E_n est une décompostion de E_n en union de parties disjointes de E_n . Autrement dit une partition est un ensemble de partie de E_n : $\{A_1, \cdots A_k\}$ tel que

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1, \cdots k \quad et \quad i \neq j \\ A_i \subset E_n \quad \forall i = 1, \cdots k \\ \bigcup A_i = E_n \end{cases} \tag{1}$$

1. Vérifier que $p_0 = 1$ et calculer p_1, p_2, p_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p_k$$
(On pourra raisonner en fixant $x \in E_{n+1}$ et en envisagent tous les A_i possibles contenant x)
3. Supposons que la série
$$\sum_0^\infty p_n \frac{z^n}{n!}$$
converge sur le disque $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon R vers une fonction f.
Montrer qu'alors f vérifie
$$f'(z) = e^z f(z) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$
4. En déduire que
$$\sum_0^\infty p_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z - 1}$$
5. Quel est le rayon de convergence R de la série?
6. Montrer que $f^{(n)}(0) = p_n$ et en déduire que
$$p_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{e^{e^z - 1}}{z^n} dz$$
7. Démontrer que
$$sup_{|z|=R} \left| e^{e^z - 1} \right| \leq \frac{e^{e^R}}{e}$$
8. En déduire que
$$p_n \leq \frac{n! e^{e^R}}{e R^n}$$
9. En choisissant judicieusement R montrer que
$$p_n \leq \frac{n! e^n}{e (\ln n)^n}$$