Université de Tours | **M1 Mathématiques**
Année 2019-2020 | **Probabilités 1**

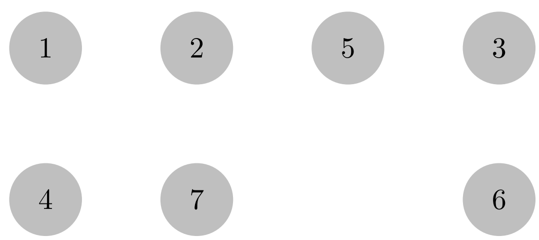
Contrôle continu 1
Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet est long et il est normal de ne pas traiter toutes les questions dans le temps imparti. Les quatre exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre une question et traiter les suivantes. Les réponses devront être étayées par des arguments construits. Bon travail !

Exercice 1 On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $E = \{1, 2, \dots, 7\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 5/8 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/9 & 7/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Dessiner le graphe de la chaîne de Markov. On pourra adopter la configuration suivante.



2) Déterminer les classes de communications de la chaîne et leur nature.
3) La chaîne est-elle irréductible ?
4) Calculer $\mathbb{P}_3(X_2 = 6)$.
5) Calculer $\mathbb{P}_3(\exists n \in \mathbb{N},\ X_n = 6)$.
6) Déterminer toutes les probabilités invariantes de cette chaîne.

Exercice 2 Un zoo a reçu six gorilles, trois mâles et trois femelles réparties au hasard en deux cages de trois singes. Le directeur presbyte, incapable de discerner les sexes des singes, décide d'utiliser le hasard pour favoriser leur reproduction. Chaque semaine, il permute un gorille de la cage 1 avec un gorille de la cage 2, choisis au hasard. On note X_n le nombre de guenons présentes la semaine n dans la première cage.

1) Justifier le fait que la suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov.
2) Déterminer la matrice de transition P de $(X_n)_n$. On pourra utiliser la symétrie mâle/femelle pour économiser des calculs.
3) La chaîne est-elle irréductible ? Quelle est la nature des états ?
4) Notons $T_2 = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 2\}$ le temps d'atteinte du point 2. Déterminer $\mathbb{E}_x(T_2)$ pour $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

5) Peut-on trouver une mesure de probabilité π telle que

$$\forall x, y \in \{0,1,2,3\}, \quad \pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \ ?$$

Cette mesure est-elle invariante ? Y a-t-il d'autres mesures de probabilité invariantes ?

On suppose dans la suite de l'exercice qu'il y a N guenons et N gorilles mâles répartis dans les deux cages.

6) On note toujours X_n le nombre de guenons dans la première cage à la semaine n. Démontrer que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{N}\right)^2 & \text{si } y = x-1, \\ 2\frac{x}{N}\left(1 - \frac{x}{N}\right) & \text{si } y = x, \\ \left(1 - \frac{x}{N}\right)^2 & \text{si } y = x+1. \end{cases}$$

7) Établir qu'il existe une constante c telle que l'unique mesure de probabilité invariante π est donnée par

$$\pi(x) = \frac{1}{c}\binom{N}{x}^2.$$

8) Montrer que

$$\binom{2N}{N} = \sum_{x=0}^{N}\binom{N}{x}^2.$$

On pourra utiliser une interprétation combinatoire de chacun des deux membres de l'égalité ou examiner le coefficient de a^N dans les deux membres de l'égalité ci-dessous :

$$(a+1)^N(a+1)^N = (a+1)^{2N}.$$

9) En déduire la valeur de c.

10) En supposant que N est pair, déterminer un équivalent des quantités $\mathbb{E}_0\big(T_0^+\big)$ et $\mathbb{E}_{N/2}\Big(T_{N/2}^+\Big)$ où $T_x^+ = \inf\{n > 0 \ : \ X_n = x\}$. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

11) Notons $\lambda_n = \mathbb{E}(X_n)/N$. Obtenir la formule de récurrence

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n\left(1 - \frac{2}{N}\right) + \frac{1}{N}.$$

En déduire l'expression de λ_n en fonction de n et λ_0 et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3 Soit d un entier supérieur à 2. On note $E = \{0, 1, \dots, d\}^2 \subset \mathbb{R}^2$ et ∂E l'ensemble des points de E dont au moins une des coordonnées vaut 0 ou d. On dit que x et y dans E sont voisins, et on note $x \sim y$, si $\|x - y\| = 1$. On considère la chaîne $(X_n)_n$ sur E de noyau de transition P donné par

$$\forall x, y \in E, \quad P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \notin \partial E \text{ et } x \sim y, \\ 1 & \text{si } x \in \partial E \text{ et } y = x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera dans la suite $T = \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n \in \partial E\}$.

Si u est une fonction définie sur E, on lui associe la fonction Δu définie sur $E \backslash \partial E$ par

$$\Delta u(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} (u(y) - u(x)).$$

Soit b une fonction définie sur ∂E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant.

Théorème. Il existe une et une seule fonction u sur E telle que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in E \backslash \partial E, \\ u(x) = b(x) & \text{si } x \in \partial E. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

1) Expliquer pourquoi le problème $(\mathcal{D})$ peut se ramener à la résolution d'un système linéaire à $(d-1)^2$ inconnues.
2) Quels sont les points récurrents et les points transients pour X ? Pourquoi T est-il fini presque sûrement lorsque $X_0 = x$ avec $x \in E$?
3) Soit u_1 et u_2 deux solutions de $(\mathcal{D})$.
   a) Établir que $u_1 - u_2$ est solution du problème suivant

   $$\text{Trouver } v : E \to \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} \Delta v(x) = 0 & \text{si } x \in E \backslash \partial E, \\ v(x) = 0 & \text{si } x \in \partial E. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}'$}$$

   b) Démontrer que, pour tout $x \in E$,

   $$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x[(u_1 - u_2)(X_n)] = \mathbb{E}_x[(u_1 - u_2)(X_T)] = 0.$$

   c) Démontrer que $n \mapsto \mathbb{E}_x((u_1 - u_2)(X_n))$ est constante.
   d) En déduire que $(\mathcal{D})$ admet une unique solution.
4) Posons $v(x) = \mathbb{E}_x(b(X_T))$. Démontrer que v est solution de $(\mathcal{D})$.

Exercice 4 Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0,1[$ et $q_n = 1 - p_n$. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition donné par

$$P(x,y) = \begin{cases} p_x & \text{si } y = x+1, \\ q_x & \text{si } y = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, on note

$$\beta_0 = 1, \quad \forall k \geq 1, \quad \beta_k = \prod_{n=0}^{k-1} p_n \quad \text{et} \quad \beta_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} p_n.$$

1) Démontrer que $(\beta_n)_n$ est une suite décroissante à valeurs dans $[0,1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\beta_\infty = 0$. On pourra considérer la suite de terme général $\gamma_n = \ln(\beta_n)$.
2) Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > n).$$

3) Dessiner le diagramme de transition associé à P. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.
4) Pour $y \in \mathbb{N}$, on note $T_y^+ = \inf\{n > 0 \,:\, X_n = y\}$ le temps de retour en y. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_x(T_0^+ > k) = \prod_{n=0}^{k-1} p_{x+n}.$$

   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur β_∞ pour que la chaîne soit récurrente.
5) Soit $x \in \mathbb{N}$. Exprimer la loi de T_0^+ sous $\mathbb{P}_x$ en fonction des $(\beta_n)_n$.
6) On suppose que la chaîne est récurrente. En utilisant la question 4, calculer $\mathbb{E}_0(T_0^+)$ en fonction des $(\beta_n)_n$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne admette une mesure de probabilité invariante.
7) On suppose dans cette question qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p$. Démontrer que $(X_n)_n$ admet une unique mesure de probabilité invariante. La déterminer.