Université de Tours | **M1 Mathématiques Approfondies**
Année 2018-2019 | **Probabilités**

Contrôle continu 1
Durée de l'épreuve : 4 heures

Les exercices sont indépendants. Le sujet est long et il est normal de ne pas traiter toutes les questions dans le temps imparti. Vous pouvez admettre une question et traiter les suivantes. Les réponses devront être étayées par des arguments construits. Un petit formulaire situé en fin d'énoncé fournit les lois classiques. Bon travail !

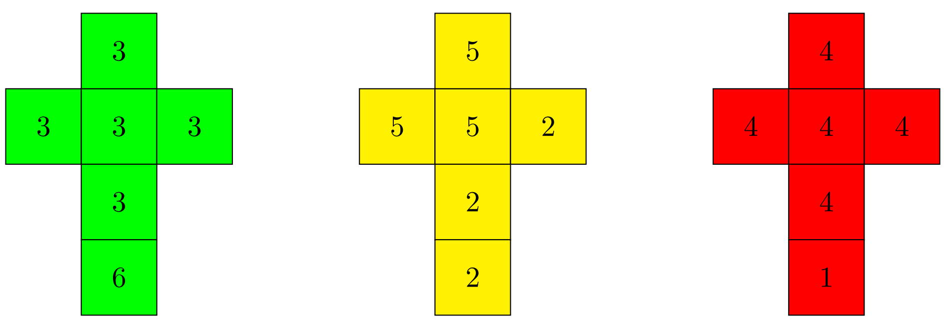
Exercice 1 Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la loi, l'intégrabilité et l'espérance (si elle existe) des variables aléatoires suivantes :

$$X = \lfloor 2U^2 \rfloor, \quad Y = \tan(\pi U - \pi/2), \quad Z = \min(2U, 1).$$

Exercice 2 [Débiaisage d'une pièce truquée] On modélise les résultats successifs d'une pièce par une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On suppose que l'on ne connaît pas le paramètre p. On construit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$ de la manière suivante : pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = 0$ si $(X_{2n-1}, X_{2n}) = (0,1)$, $Y_n = 1$ si $(X_{2n-1}, X_{2n}) = (1,0)$ et $Y_n = 2$ sinon.

1) Déterminer la loi de Y_n. Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont-elles indépendantes ?
2) Quelle est la loi du nombre de 2 qui apparaissent parmi $Y_1, \dots, Y_n$?
3) On efface alors les 2 qui apparaissent dans la suite Y. Les variables aléatoires obtenues sont-elles indépendantes ? Quelle est leur loi ?

Exercice 3 [Dés du diable] On considère les trois dés suivants appelés respectivement A, B et C.



1) Le joueur 1 choisit un des trois dés, qu'il montre au joueur 2. Celui-ci choisit à son tour un des deux dés restants. Les deux joueurs lancent les dés et le gagnant est celui qui a obtenu le meilleur score. En fonction du choix du joueur 1, quelle est la stratégie optimale pour le joueur 2 ?
2) Même question si à présent chaque joueur lance deux fois son dé et que le gagnant est celui qui a obtenu la plus grosse somme. Indication : déterminer la loi de la somme de deux lancers pour chacun des dés et utiliser $6^4 = 1296$.

Exercice 4 [Algorithme du rejet] On note, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Soit X, ε et U trois variables aléatoires indépendantes de lois respectives exponentielle de paramètre 1, $(1/2)(\delta_{-1} + \delta_{+1})$ et uniforme sur $[0,1]$.

1) La fonction g est-elle une densité de probabilité ?
2) Déterminer les fonctions caractéristiques de $Y = \varepsilon X$ et de la loi de densité g. Que peut-on en déduire ?
3) Déterminer le plus petit réel c tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq cg(x)$. On fixe dans la suite c à cette valeur.
4) Posons $A = \{cUg(Y) \leq f(Y)\}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}(cUg(Y) \leq f(Y)) = \mathbb{E}\left(\frac{f(Y)}{cg(Y)}\right).$$

En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1/c$.

5) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Démontrer que $\mathbb{P}(Y \in B | A) = \int_B f(y) dy$.
6) Proposer un algorithme de simulation de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à partir d'une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$. On pourra retrouver la loi de $-\ln(U)$ lorsque U suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Exercice 5 [Inégalité de Chernov] Soit X une variable aléatoire réelle. On définit sa transformée de Laplace L en posant, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$L(t) = \mathbb{E}\big(e^{tX}\big) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

1) Déterminer L lorsque X suit la loi de Poisson, la loi de Cauchy, la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ et la loi exponentielle de paramètre λ.
2) Démontrer que L est une fonction convexe et que l'ensemble où L est finie est un intervalle qui contient 0.
3) On suppose que L est finie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $t \mapsto \ln(L(t))$ est convexe.
4) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X que l'on suppose dans la suite centrée, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X) = 0$. On suppose que L est finie sur $\mathbb{R}$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   a) Démontrer que, pour tout $r > 0$ et tout $t > 0$

   $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{nrt}) \leq e^{-nrt} L(t)^n.$$

   b) En déduire que, pour tout $r > 0$,

   $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq \exp\left(-n \sup_{t>0}(rt - \ln(L(t))\right).$$

c) Supposons enfin que $L(t) \leq e^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-nr^2/2}.$$

5) Démontrer que la transformée de Laplace de la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ vérifie $L(t) \leq e^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pourra pour cela comparer les développements en séries entières de ces deux fonctions.

Exercice 6 [Lois infiniment divisibles] On dit qu'une loi μ sur $\mathbb{R}$ est infiniment divisible si, pour tout $n \geq 1$, il existe n variables aléatoires indépendantes et de même loi dont la somme est de loi μ.

1) Soit Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Démontrer que sa fonction caractéristique φ_Y est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \varphi_Y'(t) = -t\varphi_Y(t) & \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ \varphi_Y(0) = 1. \end{cases}$$

Démontrer que si Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\sigma Y + m$ suit encore une loi normale dont on précisera les paramètres. En déduire que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est donnée par $\psi(t) = e^{imt - \sigma^2 t^2/2}$. Les lois gaussiennes sont-elles infiniment divisibles ?

2) Retrouver la fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre λ. Les lois de Poisson sur $\mathbb{N}$ sont-elles infiniment divisibles ?

3) Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ indépendantes et de même loi, de fonction caractéristique φ, indépendantes de N. On pose

$$S = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i & \text{si } N \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction caractéristique de S. En déduire que la loi de S est infiniment divisible.

4) Montrer que si X et $\tilde{X}$ sont infiniment divisibles et indépendantes alors la loi de $X + \tilde{X}$ l'est aussi.

5) La loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ est-elle infiniment divisible ?

Formulaire

— Densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

— Densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$: $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$

— Densité de la loi de Cauchy : $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

— Loi de Poisson de paramètre λ : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$

— Loi géométrique de paramètre p : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p(1-p)^{n-1} \delta_n$

— Loi binomiale de paramètres n et p : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$