Devoir du 9 janvier 2019 – 4 heures

Les cinq exercices sont indépendants. Le résultat d'une question non traitée peut être admis et utilisé par la suite. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction. Bon travail !

Exercice 1
On appelle loi de Cauchy la loi de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1) Déterminer la fonction de répartition F de la loi de Cauchy.
2) Comment obtenir une variable aléatoire de loi de Cauchy à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$? On justifiera la réponse.
3) Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy. Montrer que la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$ vaut $F_Y(t) = \frac{2}{\pi}\arctan(t)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.
4) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Cauchy. Pour tout $n \geq 1$, on pose $M_n = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n.
5) Justifier que pour tout $n \geq 1$, on peut définir $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.
6) Montrer que Z_n converge en loi et préciser la loi limite.
Rappel : pour $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\arctan(x) = x + o(x)$ *quand* $x \to 0$.

Exercice 2
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1) Calculer l'espérance et la variance Y_1.
2) Calculer pour tous $i, j \geq 1$, la covariance $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3) En déduire que $\mathbb{V}(S_n) = 5n - 2$.
4) La suite de variables aléatoires $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en probabilité ? Justifier.

Exercice 3
Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Justifier que pour n assez grand,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{X_n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95.$$

On pourra utiliser que pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 2) \simeq 0,9544$.

Exercice 4 (Loi forte des grands nombres L^2)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, centrées et de variance finie. On suppose que les X_n, $n \geq 1$, sont deux à deux indépendantes. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(|S_{n^2}| > \varepsilon n^2)$ est convergente.
2) En déduire que (S_{n^2}/n^2) converge presque sûrement vers 0.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=n^2+1}^{N} X_k\right| > \varepsilon n^2\right) \leq \frac{N-n^2}{\varepsilon^2 n^4}\mathbb{V}(X_1), \qquad \text{pour } N > n^2,$$

puis que

$$\mathbb{P}\left(\max_{n^2<N<(n+1)^2}\left|\sum_{k=n^2+1}^{N} X_k\right| > \varepsilon n^2\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2 n^2}\mathbb{V}(X_1).$$

4) En déduire que (S_n/n) converge presque sûrement vers 0.

Exercice 5 (Le processus de Galton–Watson)
En étudiant le mécanisme de l'extinction des noms de famille noble en Grande-Bretagne, Galton et Watson ont introduit le processus aléatoire suivant qui modélise la descendance d'un individu sur des générations successives.

La génération zéro (point de départ) est constituée d'un unique individu. Chaque individu a ensuite la même probabilité notée p_k d'avoir k descendants à la génération suivante, $k \in \mathbb{N}$. Chaque génération ne prend en compte que les descendants de la génération précédente. On note $m = \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k$ le nombre moyen descendants d'un individu et on suppose m finie. De plus, les nombres de descendants de chaque individu sont des variables aléatoires indépendantes.

On note Z_n le nombre d'individus à la génération n, $n \geq 0$. Si $Z_n = 0$ pour un certain n, on aura $Z_k = 0$ pour tout $k \geq n$ et on dira qu'il y a extinction. On note $X_{n,j}$ le nombre de descendants du j-ième individu de la génération n. On a donc

$$Z_0 = 1 \;\text{ et }\; Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{n,j} \;\text{ pour } n \geq 1 \qquad \left(\text{avec la convention } \sum_{j=1}^{0} X_{n,j} = 0\right)$$

où tous les $X_{n,j}$ sont indépendants et de même loi $R = \sum_{k\geq 0} p_k\delta_k$ (loi de reproduction).

On note G_n la série génératrice de Z_n définie par $G_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n})$ pour $s \in [0,1]$ et on note G la série génératrice de la loi R. On remarquera que $G = G_1$.

Partie I. Comportement en moyenne.

I.1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

I.2) Pour $m \neq 1$, étudier la convergence dans L^1 de la suite de variables aléatoires (Z_n).

Partie II. Probabilité d'extinction.

Le but de cette partie est d'étudier la probabilité d'extinction $\rho = \mathbb{P}(\exists n \geq 1,\ Z_n = 0)$.

II.1) On suppose que $p_0 = 0$. Que vaut ρ ?

II.2) On suppose que $p_0 \neq 0$ et que $p_0 + p_1 = 1$. Que vaut ρ ?

Dans toute la suite de l'exercice on suppose $p_0 \neq 0$ et $p_0 + p_1 < 1$.

II.3) Vérifier que $G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et montrer que $\rho = \lim_{n\to\infty} G_n(0)$.

II.4) Pour tout $n \geq 0$, établir la relation de récurrence $G_{n+1} = G_n \circ G$ puis en déduire que $G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}$.

II.5) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = G(u_n)$. Établir que (u_n) converge vers ρ.

II.6) D'autre part, montrer que G est croissante et strictement convexe sur $[0, 1]$.

II.7) Vérifier que $G(0) > 0$, que $G(1) = 1$ et que $G'(1) = m$.

II.8) En fonction des valeurs de m, déterminer le nombre de points fixes de G dans $[0, 1]$ (on pourra s'aider d'un dessin).

II.9) En revenant à la suite (u_n), montrer que si $m \leq 1$ alors $\rho = 1$ (l'extinction a lieu avec probabilité 1), tandis que si $m > 1$ alors $\rho < 1$.

II.10) Pour $m = 1$, a-t-on convergence presque sûre de la suite (Z_n) ? A-t-on convergence dans L^1 ?

Partie III. Taille de l'arbre généalogique.

Dans cette partie, on se place dans le cas $m \leq 1$. On note $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} Z_k$ le nombre total d'individus dans l'arbre généalogique.

III.1) Justifier que $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$.

III.2) Déterminer la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de m.

Partie IV. Longévité.

Dans cette partie, on se place dans le cas critique où $m = 1$ (et donc $\rho = 1$). On suppose de plus que la loi de reproduction R admet un moment d'ordre 2 fini et que sa variance $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_{1,1})$ est strictement positive.

On considère $T = \inf\{n \geq 1 \ : \ Z_n = 0\}$ la variable aléatoire correspondant à la génération à laquelle a lieu l'extinction.

IV.1) On considère à nouveau la suite (u_n) introduite à la question II.5). Établir l'égalité $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(1 - u_n)$.

IV.2) Justifier, en utilisant une formule de Taylor, l'existence d'une fonction $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{s\to 1^-} \alpha(s) = 0$ et pour tout $s \in [0, 1]$,

$$G(s) = s + \frac{\sigma^2}{2}(1 - s)^2 + (1 - s)^2\alpha(s).$$

IV.3) En déduire que

$$\lim_{s\to 1^-} \left(\frac{1}{1 - G(s)} - \frac{1}{1 - s} \right) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

IV.4) En utilisant le lemme de Cesàro, établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1 - u_n)} = \frac{\sigma^2}{2}$.

IV.5) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Formulaire :

- La loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ est la loi de densité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$.
- La loi exponentielle de paramètre $\gamma > 0$ est la loi de densité $f(x) = \gamma e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
- La loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi de densité $f(x) = \dfrac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.
- La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est la loi discrète $\displaystyle\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$.
- La loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ est la loi discrète $\displaystyle\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} \delta_k$.
- La loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ est la loi $\displaystyle\sum_{k\geq 0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$.