Université François Rabelais de Tours
Département de Mathématiques

Examen final – Session de juin 2019

UE 6-3 Algèbre | Semestre 6

L'épreuve dure 3h. Les exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la clarté de la rédaction. ***Toute affirmation doit être justifiée*** *sauf mention contraire.*

Exercice

1) (a) Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?
   (b) Factoriser $X^4 - 1$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{Q}$.

2) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une forme linéaire dont F est le noyau.

3) Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$.
   (a) Énoncer le lemme des noyaux.
   (b) Montrer que s est diagonalisable.
   (c) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker(s + \mathrm{Id})$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ une base de $\ker(s - \mathrm{Id})$. Justifier que $p + q = n$ puis que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et déterminer la matrice de s dans cette base.
   (d) Calculer le déterminant de s en fonction de p.

4) (a) Montrer que $P = X^3 + X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
   On pose $\mathbb{F} := \mathbb{F}_2[X]/(P)$ et on désigne par α la classe de X modulo P.
   (a) Montrer que $\mathbb{F} := \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \mid (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{F}_2\}$.
   (b) Mettre sous la forme $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$ les éléments suivants :
   $$\alpha^3, \alpha^{-1} \text{ et } (\alpha + \alpha^2) \cdot \alpha^2$$
   (c) Combien y-a-til d'éléments dans $\mathbb{F}$?

5) (a) Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{R}^3$ ayant pour polynôme minimal $X + 1$.
   (b) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme minimal $(X + 1)(X - 2)$.
   (c) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme minimal $(X + 1)(X - 2)^2$.

6) Soit u un endomorphisme nilpotent de E d'indice $r \in \mathbb{N}$ et soit $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F} := (x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ forme une famille libre de E.
   (b) On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Déterminer la matrice de $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{F}$.

7) Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A et son polynôme minimal.
   (b) Calculer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.
   (c) Déterminer la décomposition de Dunford de A.