Contrôle de Mars 2019

Durée : 3h
Documents et calculatrices non autorisés

Questions et exercices issus du cours et des travaux dirigés

1. (a) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
   Pour ces deux questions, on justifiera la réponse à l'aide d'un théorème du cours.
   (c) Factoriser le polynôme $X^4 - 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Quel est la factorisation de $X^4 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$?

2. Soit $\mathbb{K}$ un corps.
   (a) Montrer que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal.
   (b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et (P) l'idéal engendré par P. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que l'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$ soit un corps.
   (on se contentera d' énoncer avec précision cette condition sans détailler la démonstration)
   Expliciter un exemple dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

3. Montrer que l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{Z}[X] \text{ t.q. } P(0) \text{ est divisible par } 5\}$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ mais que cet idéal n'est pas principal.

Exercice 1 Montrer que le polynôme $P = X^3 + X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. On pose $\mathbb{K} := \mathbb{F}_2[X]/(P)$.

1. Quelle structure possède $(\mathbb{K}, +, \times)$; pourquoi ?
   On désigne par α la classe de X modulo P.
2. Montrer que $\mathbb{K} = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \mid (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{F}_2^3\}$.
3. Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathbb{K}$?
4. Décomposer sous la forme $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$ les éléments suivants :

$$\alpha^3, \alpha^{-1} \text{ et } (\alpha + \alpha^2) \cdot \alpha^2$$

Exercice 2 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. On appelle *radical* de I l'ensemble $\mathcal{R}(I)$ des éléments $a \in A$ tels qu'il existe un entier $n \geq 1$ vérifiant $a^n \in I$.

1. Quel est le radical de $\{0\}$?
2. Montrer que $\mathcal{R}(I)$ est un idéal de A et que $I \subset \mathcal{R}(I)$.
3. Montrer que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I)) = \mathcal{R}(I)$.
4. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que l'on a $\mathcal{R}(I \cap J) = \mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)$.

Exercice 3 - Pour tout nombre complexe α, on rappelle que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et α.

1. Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.
2. Montrer que $\sqrt{3}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Quel est le degré de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$?
   Expliciter une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$.
   Quel est le polynôme minimal $\mu_{\mathbb{Q},\sqrt{3}}(X)$ de $\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$?
3. Justifier que le nombre complexe i tel que $i^2 = -1$ n'est pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mais qu'il est algébrique sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
   Quel est le polynôme minimal $\mu_{\mathbb{Q}(\sqrt{3}),i}(X)$ de i sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?
4. Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$? (on rappelle que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ désigne la plus petite extension de $\mathbb{Q}$ contenant $\sqrt{3}$ et i)
5. Donner une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ sur $\mathbb{Q}$.
   Quels peuvent-être les degrés des corps "intermédiaires" c'est-à-dire des corps $\mathbb{K}$ tels que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$?
6. Soit $\alpha = \sqrt{3} + i$. Justifier que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$.
   Montrer qu'il n'existe aucun polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$ qui annule α. Que peut-on en déduire pour $\mathbb{Q}(\alpha)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$?
7. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\alpha_k = \sqrt{3} + ki$.
   Pour quelles valeurs de k a-t-on $\mathbb{Q}(\alpha_k) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$?
8. On pose $\beta = \sqrt{3}i$. A-t-on l'égalité $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$? Justifier.