Universités François Rabelais **2018-2019**

L3 Mathématiques

Algèbre: Contrôle continu du 17/05/19

Durée 3 heures

Aucun document ni machine autorisé

La rédaction constitue une part importante de l'évaluation, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1: Questions brèves issues du cours (4 points).

1. Pourquoi un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet-il toujours une racine réelle ?
2. Le nombre $u = \cos(\frac{\pi}{6})$ est-il algébrique ou transcendant sur $\mathbb{Q}$. Quel est son polynôme minimal et la dimension de $\mathbb{Q}(u)$?
3. On se donne la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xy + xz$. Donner la forme biliéaire associée, déterminer la signature de q.
4. On se donne la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Donner son polynôme caractéristique et en déduire qu'elle est toujours diagonalisable.

Exercice 2 (4 points): On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et sa base canonique $B = (1, X, \ldots, X^n)$.

1. Rappeler la définition de la base duale $B^* = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de B.
2. On considère les formes linéaires $f_0, \ldots, f_n$ sur E définies par $f_i(P(X)) = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ pour tout $P(X)$ dans E (avec $P^{(i)}(X)$ la dérivée i-ième de P). Calculer $f_i(X^j)$ pour $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$. Que peut-on en déduire ?
3. À l'aide de ce qui précède montrer que pour tout polynôme $P(X) \in E$, on a $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i$.
4. Soit F le sous-espace vectoriel des polynômes P de E tels que $P(-X) = X$. Donner une base de F et en déduire $F^{\perp}$.

Exercice 3 (4 points): Soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Donner les valeurs propres de T.

2. Donner sans calcul deux vecteurs propres de T.

3. On suppose que $a \neq b$, diagonaliser T.

4. On suppose $a = b$. Donner la décomposition de Dunford de T.

Exercice 4 (3 points): Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $S : E \to E$ par

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que S est un endomorphisme de E et calculer S^2.

2. Donner le polynôme minimal de S puis diagonaliser S.

Pour la fin de l'examen, on pourra choisir de traiter l'exercice 5 ou l'exercice 6 (mais pas de traiter des questions dans chaque !).

Exercice 5 (5 points): Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer son polynôme caractéristique χ.

2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer la décomposition de Dunford de M.

Exercice 6 (5 points): Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et $u = d + n$ sa décomposition de Dunford.

1. Déterminer la décomposition de Dunford de u^2 en fonction de d et n.

2. De façon générale, comment trouver la décomposition de Dunford de u^k pour tout entier $k \geq 1$.

3. Justifier que u est inversible si et seulement si d est inversible. Donner dans ce cas la décomposition de Dunford de u^{-1} en fonction de d et n.