Université François-Rabelais de Tours 2018/19

Master 1 Mathématiques Approfondies — Analyse Fonctionnelle I

Epreuve de rattrapage (session de juin). Cours et TDs autorisés.
Barême indicatif sur 43 points dont 7pts hors barème (moyenne=18pts).
Durée 3h. Choisir 5 exercices à traîter parmi les 6.

Exercice 1. (7 pts, opérateurs dans un espace de Hilbert et un peu de Fourier)

1. Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H,H)$. On rappelle que λ est une valeur propre de A s'il existe $e \in H$ tel que $Ae = \lambda e$. Dans ce cas, on dit que e est un vecteur propre associé à λ. On suppose que A est autoadjoint, càd $A^* = A$.

(a) Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.

(b) Montrer que si e, f sont vecteurs propres de A qui correspondent à deux valeurs propres différentes, alors $e \perp f$.

2. Soit $H = L^2_{per}$. On note par $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de $f \in H$; on rappelle que $f \in H$ ssi $(c_n(f)) \in \tilde{\ell}^2$, où $\tilde{\ell}^2$ désigne l'espace des suites compexes numérotés par $n \in \mathbb{Z}$. On définit l'opérateur

$$S : f \mapsto \left[t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n c_n(f) e^{int} \right].$$

1. Calculer S pour $f = 1$ puis pour $f : t \mapsto \cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$.
2. Montrer que $S \circ S = \mathrm{Id}$.
3. Montrer que S est une isométrie linéaire surjective de H.
4. Montrer que S est auto-adjoint.

Exercice 2. (10.5 pts, opérateurs linéaires continus)

Soit $\ell_2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty\}$ muni sa norme usuelle.
On considère sur l'espace ℓ_2 les applications suivantes :
- l'application G définie par :

$$G : \ \mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) \ \mapsto \ G\mathcal{X} = (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots).$$

- l'application D définie par :

$$D : \ \mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \ \mapsto \ D\mathcal{X} = (x_1, -x_1, x_2, -x_2, x_3, -x_3, \dots).$$

1. (i) Montrer que G et D sont bien définies, linéaires et continues de ℓ_2 dans ℓ_2.
(ii) Calculer $\|G\|$. Calculer $\|D\|$.

2. Trouver l'adjoint de l'opérateur D.

3. On note $G^k := G \circ G \circ \cdots \circ G$ (G appliqué k fois).
(a) Montrer que $\forall \mathcal{X} \in c_{00}$, $\lim_{k\to\infty} G^k\mathcal{X} = 0$.
(b) En déduire que $\forall \mathcal{X} \in \ell_2$ on a encore $\lim_{k\to\infty} G^k\mathcal{X} = 0$.
(b) A-t-on $G^k \to 0$ dans $\mathcal{L}(H)$ lorsque $k \to \infty$?
(c) Montrer que G n'admet pas de point fixe non trivial.

Tournez, SVP

Exercice 3. (5 pts, convergences dans l'espace des suites)
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{X}^m := \left(1, \frac{1}{2^{1+1/m}}, \frac{1}{3^{1+1/m}}, \dots, \frac{1}{n^{1+1/m}}, \dots\right)$.
(a) Trouver la limite simple (composante par composante) de $(\mathcal{X}^m)_m$.
(b) Montrer que pour tout p tel que $1 < p < +\infty$, $(\mathcal{X}^m)_m$ converge dans ℓ^p.
(c) Montrer que $(\mathcal{X}^m)_m \subset \ell^1$ mais elle diverge dans ℓ^1.
(d) Est-ce que $(\mathcal{X}^m)_m$ converge dans ℓ^∞ ?

Exercice 4. (7 pts, théorème de Lax-Milgram)
On travaille dans l'espace ℓ^2 réel. On se donne, de plus, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ qu'on suppose positive composante par composante (càd, $\forall n \in \mathbb{N}\;\; \alpha_n \geq 0$).

On pose $a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$,

$$a(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n + x_{n+1})(y_n + y_{n+1})$$

où x_n, y_n sont les composantes de $\mathcal{X}$,$\mathcal{Y}$ respectivement.
1. Montrer que $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ où

$$A : \mathcal{X} = (x_n)_n \mapsto (x_n + x_{n+1})_n.$$

2. Montrer qu'il existe $\mathcal{X}_* \in \ell^2$ vérifiant

$$\forall \mathcal{Y} = (y_n)_n \in \ell^2 \quad a(\mathcal{X}_*, \mathcal{Y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n}.$$

3. Trouver $\mathcal{X}_*$ dans le cas où $(\alpha_n)_n$ est une suite nulle.

Exercice 5. (6 pts, densité)
On considère les espaces réels $C([0,1])$ et $L^p(]0,1[)$ (pour la mesure de Lebesgue).
1. Déduire le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass de celui de Stone-Weierstrass.
2. En déduire la densité des fonctions polynomiales dans $L^p(]0,1[)$ pour $1 \leq p < +\infty$.
3. Soit $f \in L^2(]0,1[)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\;\; \int_{]0,1[} f(t) t^n \, d\lambda(t) = 0$.
Montrer que $f = 0$ λ-p.p. sur $]0,1[$.
4. Les fonctions polynomiales sont-elles denses dans $L^\infty(]0,1[)$?

Exercice 6. (7.5 pts, normes sur l'espace des fonctions continues)
Soit $E = C_{per}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.
On considère $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)\sin(t)|.$$

1.(a) Montrer que N est une norme sur E.
(b) Montrer que si $f_n \to f$ dans E pour sa norme canonique $\|\cdot\|_\infty$,
alors $f_n \to f$ pour la norme N.
(c) Étudier l'affirmation réciproque en se servant de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{n|t|}{\pi} & , \quad |t| \leq \frac{\pi}{n} \\ 0 & , \quad \textit{sinon} \end{cases}$$

(d) Les normes $N(\cdot)$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E sont-elles équivalentes ?
Que peut-on en déduire concernant la boule unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
2. Montrer que (E, N) n'est pas complet.