Analyse Fonctionnelle – Contrôle final.
Durée 4h. Documents autorisés. Barême *indicatif* sur 72 points.

Exercice 1. *(12 pts : adjoint d'un opérateur dans un espace de Hilbert ; base hilbertienne)*
1. Soit H un Hilbert quelconque et $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.
En déduire que AA^* est auto-adjoint.

2. Soit l'espace de Hilbert ℓ^2 réel. Trouver l'adjoint de l'opérateur de left-shift

$$L : (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

3. Soit l'espace de Hilbert L^2_{per} complexe. Pour $f \in L^2_{per}$, on désigne par $(c_n(f))_n$ la suite de ses coefficients de Fourier (ce qui signifie que $f(.) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\cdot}$).
a. Montrer que l'opérateur $A : f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\cdot}$, où

$$d_0 = 0, \quad d_n = c_{-n}(f) \text{ pour } n > 0 \quad \text{ et } \quad d_n = -c_{-n}(f) \text{ pour } n < 0$$

est linéaire, borné, de norme 1 et anti-autoadjoint.
b. Trouver le plus grand sous-e.v. $E \subset H$ tel que A envoie E sur E isométriquement.

Exercice 2. *(16 pts : opérateurs linéaires sur un espace de suites ; modes de convergence)*
Pour $1 < p < \infty$, on considère l'espace de Banach ℓ^p réel.

1. On considère l'opérateur P défini sur ℓ^p par

$$P\mathcal{X} = P(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_3, x_5, ..., x_{2n+1}, ...),$$

c'est à dire, pour $\mathcal{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'image $P\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $y_n = x_{2n+1}$.

(a) Montrer que cela définit une application linéaire continue $P : \ell^p \to \ell^p$ de norme 1.

(b) On fixe $\mathcal{X} = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell^p$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P^k\mathcal{X} = (x_{2^k-1}, x_{2\cdot 2^k-1}, x_{3\cdot 2^k-1}, \dots, x_{n\cdot 2^k-1}, \dots).$$

En déduire que la suite $(P^k\mathcal{X})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_{ℓ^p} dans ℓ^p.

(c) Peut-on dire que la suite d'opérateurs $(P^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathcal{L}(\ell^p)}$ dans $\mathcal{L}(\ell^p)$?

(d) Si on définit de la même façon l'opérateur P sur ℓ^∞, est-il encore vrai que pour tout $\mathcal{X} \in \ell^\infty$ la suite $(P^k\mathcal{X})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_{ℓ^∞} dans ℓ^∞ ?

2. On considère maintenant l'opérateur Q défini sur ℓ^p par

$$Q\mathcal{X} = Q(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2 ...),$$

c'est à dire, pour $\mathcal{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'image $Q\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$y_n = 0$ lorsque n est pair, et $y_n = x_{\frac{n-1}{2}}$ lorsque n est impair.

(a) Pour quel(s) $\mathcal{X} \in \ell^p$ la suite $(Q^k\mathcal{X})_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en norme $\|.\|_p$?

(b) Soit p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On suppose que $\mathcal{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et pour $k \in \mathbb{N}$ on note $Q^k\mathcal{X} = (y_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $\mathcal{Z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$ on a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n,k}\, z_n = 0.$$

Indication : On pourra le montrer d'abord pour $\mathcal{Z} \in c_{00}$.

(c) Pourquoi peut-on dire que $(Q^k\mathcal{X})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro faiblement dans ℓ^p ?

Tournez, SVP

Exercice 3. *(16 pts : densité ; projection hilbertienne sur un sous-espace)*
Soit $H := L^2([-1,1])$ réel pour la mesure de Lebesgue, et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : t \mapsto t^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad e_n : t \mapsto e^{nt}.$$

1.a. La famille $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une base hilbertienne de H ?
b. Le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est-il dense dans H ?
Indication : On peut chercher des éléments dans $\mathcal{F}^\perp$.
c. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-il dense dans H ?
Indication : On peut s'intéresser, dans un premier temps, à sa densité dans $C([-1,1])$.
2.a. Justifier que pour tout $g \in L^2([-1,1])$ il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\int_{-1}^{1} \Big|g(t) - at - bt^3\Big|^2 dt = \inf_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \int_{1}^{1} \Big|g(t) - \alpha t - \beta t^3\Big|^2 dt,$$

b. Montrer que le couple (a,b) est donné par le système d'équations

$$\text{pour } n = 0,1 \qquad \int_{-1}^{1} g(t) t^{2n+1}\, dt = \frac{2a}{2n+3} + \frac{2b}{2n+5}$$

c. En réfléchissant ou en faisant le calcul, trouver le couple (a,b) qui correspond à

(i) $g : t \mapsto t$; (ii) $g : t \mapsto |t|$; (iii) $g : t \mapsto 1 + t$.

Exercice 4. *(14 pts : divers modes de convergence dans les L^p ; inégalité de Hölder)*
Soit (pour simplifier) $p \in \mathbb{N}^*$. On fixe $(g_n)_n$ une suite convergente de $L^p(X,\mu)$; soit g sa limite. On cherche à montrer que g_n^p converge vers g^p dans $L^1(X,\mu)$. On donnera deux solutions.
1.a. Montrer qu'il existe une sous-suite $(g^p_{\phi(k)})_k$ qui converge vers g^p dans $L^1(X,\mu)$
b. En argumentant par l'absurde, en déduire que toute la suite $(g_n^p)_n$ converge vers g^p.
2.a. On regarde le cas $p = 2$. Montrer que la suite $(g + g_n)_n$ est bornée dans $L^2(X,\mu)$.
Utiliser l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour montrer que $\|g_n^2 - g^2\|_1 \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
b. Généraliser la preuve de **2.a.** au cas où $p \geq 2$ est un entier quelconque.
Indication On rappelle la factorisation $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + ab^{p-2} + b^{p-1})$.
Remarque La première solution marche pour $p \in]1,+\infty[$ réel. La seconde peut s'y adapter, en remplaçant la factorisation par la formule de Taylor $a^p - b^p = (a-b)\displaystyle\int_0^1 p\Big(ta + (1-t)b\Big)^{p-1} dt.$

Exercice 5. *(14 pts : applications linéaires sur L^p, théorème de Lax-Milgram)*
Soit l'espace $L^2([-1,1])$ réel, muni de la mesure de Lebesgue.
Soit k une fonction vérifiant $k \in L^1([-1,1])$, $k(t) \geq 0$ pour p.t. $t \in [-1,1]$.
On considère $\phi : L^2 \to \mathbb{R}$ et $a : L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}$ définis par

$$\phi : g \mapsto \int_{-1}^{1} g(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad a : (f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} \Big(f(t)g(t) + k(t)P_f(t)P_g(t)\Big)\, dt$$

où pour $h \in L^2([-1,1])$, P_h désigne la primitive de h qui s'annule en 0, càd $P_h : t \mapsto \int_0^t h(s)\, ds$.
1. Montrer que l'application $h \mapsto P_h$ est linéaire continue de $L^2([-1,1])$ dans $L^\infty([-1,1])$.
2.a. Montrer que le problème suivant :

$$(*) \qquad \textit{trouver } f_0 \in L^2([-1,1]) \qquad \textit{telle que} \quad \forall g \in L^2([-1,1]),\ a(f_0, g) = \phi(g)$$

admet une et une seule solution.
b. Montrer que $\|f_0\|_2 \leq |||\phi||| = \sqrt{2}$ et que $\int_{-1}^1 f_0(t)\, dt > 0$.
c. Montrer que si k est une fonction paire, alors f_0 l'est aussi.
Indication : on peut considérer $S : h \mapsto [t \to h(-t)]$.