Université François-Rabelais / Université d'Orléans Novembre 2018
Master de mathématiques 1ère année

Analyse Fonctionnelle – Devoir surveillé.
Durée 4h. Documents autorisés. Barème *indicatif* sur 24 points.
Il est autorisé d'admettre explicitement certaines questions pour les utiliser dans la suite.

Exercice 1. (1,5 (+1,5) pts)
Montrer que ℓ^1 est séparable.
(On peut utiliser, sans démonstration, un critère de séparabilité vu en cours ou en td.)

(Bonus) Démontrer ce critère.

Exercice 2. (1,5 pts) (Opérateur de composition.)
Soit $E = C([0;1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $h : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue. Montrer que

$$A : E \to E, \qquad Af = f \circ h$$

est un opérateur bien défini, linéaire et borné. Calculer sa norme.

Exercice 3. (8,5 pts) (Espace $C([a,b])$, norme pondérée, point fixe et équadiff)
Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0,1]\ \phi(x) \geq 0$.
On dénote $E = C([0;1])$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions f continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Dénotons $\|\cdot\|_\infty$ la norme usuelle sur E.
On admet que $\|\cdot\|_{\phi,\infty} : f \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x)\phi(x)|$ est une semi-norme sur E (qui coincide avec $\|\cdot\|_\infty$ lorsque ϕ est la fonction constante 1).

1. On suppose dans cette question que $\phi > 0$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que $\|\cdot\|_{\phi,\infty}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
   (b) En déduire que $\left(E\,,\ \|\cdot\|_{\phi,\infty} \right)$ est un espace de Banach.
2. On suppose dans cette question que $\phi : x \mapsto x$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & x \in [0,1/n] \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [1/n,1] \end{cases}$ dans E est une suite de Cauchy en $\|\cdot\|_{\phi,\infty}$ qui n'a pas de limite.
   (b) Pour ce choix de ϕ, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\phi,\infty}$ sont-elles équivalentes ?
3. Considérons l'opérateur

$$T : E \to E \qquad \text{défini par } \forall x \in [0,1]\ \ (Tf)(x) = \int_0^x 4t^2\, f(t)\, dt.$$

   On suppose dans cette question que $\phi : x \mapsto e^{-2x^3}$.
   (a) Vérifier que T est bien défini et linéaire.
   Étudier ensuite la continuité de T, plus précisément :
      i. Soit $|||T|||_\infty$ la norme d'opérateur de T lorsqu'on munit E (espace de départ et d'arrivée) de la norme canonique $\|\cdot\|_\infty$. Calculer $|||T|||_\infty$.

ii. Soit $\|T\|_0$ la norme d'opérateur de T lorsqu'on munit E (espace de départ et d'arrivée) de la norme $\|\cdot\|_{\phi,\infty}$. Montrer que $\|T\|_0 \leq \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{2}{3}(1-e^{-2x^3})\right| < \frac{2}{3}$.

Indication : on peut écrire $t^2 f(t) = t^2 e^{2t^3} \cdot f(t)e^{-2t^3}$.

(b) Déduire des questions précédentes que dans E, l'équation intégrale

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x 4t^2 y(t)\, dt, \quad x \in [0;1] \tag{1}$$

admet une et une seule solution en l'inconnue y.

Indication : considérer $\tilde{T} : E \to E$, $(\tilde{T}f)(x) = \frac{x^3}{3} + (Tf)(x)$.

(c) Quel problème de Cauchy de la forme

$$\begin{aligned} y' &= F(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

peut être résolu en étudiant l'équation intégrale (1) ?

(On demande une déduction, mais pas de justification détaillée.)

Exercice 4. (8 pts) (Espaces de suites à poids.)

Pour $\mathcal{R} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite fixée dans $\mathbb{R}_+^*$, on désigne par $\ell_p^{\mathcal{R}}$, $1 \leq p < \infty$, l'ensemble de suites réelles $\mathcal{X} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$N_p^{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

On désigne par $\ell_\infty^{\mathcal{R}}$ l'ensemble de suites réelles telles que

$$N_\infty^{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |r_n x_n| < \infty.$$

1. Montrer que $(\ell_\infty^{\mathcal{R}}, N_\infty^{\mathcal{R}})$ est un espace vectoriel normé.
2. (a) Pour quel choix de $\mathcal{R}$ les normes $N_\infty^{\mathcal{R}}$ et $\|\cdot\|_\infty$ coïncident-elles ?
   (b) Soit $\mathcal{R}_1 = (1,2,3,\ldots,n,\ldots)$. Montrer que $\ell_\infty^{\mathcal{R}_1} \subsetneq \ell_\infty$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathcal{R}$ pour que $\ell_\infty^{\mathcal{R}} \subset \ell_\infty$.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathcal{R}$ pour que $\ell_\infty^{\mathcal{R}} \supset \ell_\infty$.
   (e) Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathcal{R}$ pour que $\ell_\infty^{\mathcal{R}} = \ell_\infty$ et montrer que dans ce cas les normes $N_\infty^{\mathcal{R}}$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

   Dans le reste de l'exercice, $\mathcal{R}$ est à nouveau quelconque.
3. Montrer que $(\ell_\infty^{\mathcal{R}}, N_\infty^{\mathcal{R}})$ est complet.
4. Montrer que c_{00} (l'ensemble de suites nulles à partir d'un certain rang) est dense dans $\ell_1^{\mathcal{R}}$.
5. Déduire de l'inégalité de Hölder la généralisation suivante : pour $p \in]1,\infty[$ et q l'exposant conjugué de p,

$$\forall \mathcal{X} = (x_n) \in \ell_p^{\mathcal{R}},\ \ \forall \mathcal{Y} = (y_n) \in \ell_q^{\mathcal{R}},\ \ \sum_{n=1}^{\infty} r_n |x_n y_n| \leq N_p^{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) N_q^{\mathcal{R}}(\mathcal{Y}).$$

6. Soit $1 < p < \infty$, soit q l'exposant conjugué de p, et soit $\mathcal{Y} \in \ell_q^{\mathcal{R}}$. Montrer que l'application

$$\phi_{\mathcal{Y}} :\ \ \mathcal{X} \in \ell_p^{\mathcal{R}} \ \mapsto\ \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n y_n$$

est bien définie et $\phi_{\mathcal{Y}} \in (\ell_p^{\mathcal{R}})^*$ avec $\|\phi_{\mathcal{Y}}\| \leq N_q^{\mathcal{R}}(\mathcal{Y})$.

Exercice 5. (4,5 pts) (Modes de convergence dans ℓ^2.)
On travaille dans l'espace ℓ^2 réel. On notera e^m le $m^{\text{ième}}$ vecteur de la "base canonique" de ℓ^2. On écrira CV pour la convergence en norme $\|\cdot\|_2$ (la convergence forte), CVF pour la convergence faible et CVS pour la convergence simple (composante par composante).

Rappelons que le dual de ℓ^2 est identifié à lui même par l'application linéaire bijective isométrique

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \ell^2 & \to & \ell^2 \\ & \mathcal{Y} & \mapsto & \Phi_{\mathcal{Y}} \end{array} \quad \text{où } \Phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \sum_n x_n y_n \text{ pour tous } \mathcal{Y} = (y_n) \in \ell^2, \mathcal{X} = (x_n) \in \ell^2.$$

1. a) Montrer que $CV \Rightarrow CVS$.
   b) Montrer qu'en général, $CVS \not\Rightarrow CV$.

2. a) Montrer que $CV \Rightarrow CVF$.
   b) Montrer que la suite $(e^m)_m$ converge faiblement vers 0.
   c) En déduire qu'en général, $CVF \not\Rightarrow CV$.

3. Montrer que $CVF \Rightarrow CVS$.

4. Montrer que $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}^m \text{ CVF vers } \mathcal{X} \\ \left(\|\mathcal{X}^m\|_2\right)^2 \to \left(\|\mathcal{X}\|_2\right)^2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}^m \text{ CV vers } \mathcal{X}.$
   Indication : $\sum_n |x_n^m - x_n|^2 = \sum_n |x_n^m|^2 + \sum_n |x_n|^2 - 2\sum_n x_n^m x_n$.