Examen du module Compléments d'algèbre : Groupes

Jeudi 9 Janvier 2020

Durée : 6h

Cet examen comprend deux parties indépendantes. La première propose des exercices en lien direct avec ceux de cours, la deuxième est constituée de plusieurs parties d'un problème d'agrégation ; la partie IA du problème sera admise et ne devra pas être traitée.[1]*. Les notations de la partie A sont celles du cours, celles du problème sont rappelées en début du problème.*

Partie A :

Questions brèves :

1) Un groupe G à 33 éléments agit sur un ensemble X à 19 éléments. Démontrer qu'il y a nécessairement un point fixe sous l'action de G.

2) Quel est le plus petit n tel que $\mathfrak{S}_n$ contient un élément d'ordre 14 ?

Exercice 1 :

Soit $(G, .)$ un groupe.

1) En utilisant l'application θ qui à tout élément $g \in G$ associe α_g automorphisme intérieur défini pour tout $x \in G$, par $\alpha_g(x) = gxg^{-1}$, établir que $Int(G) = \{\alpha_g, g \in G\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.

2) Démontrer que $Int(G)$ est isomorphe à $G/Z(G)$ ($Z(G)$ étant le centre de G).

3) En déduire que si $|G| = p^3$ où p est un nombre premier et que G est non commutatif alors $|Int(G)| = p^2$.

Exercice 2 :

Soient $q, r \in \mathbb{N}^*$ et G un groupe fini de cardinal $n = qr$, ayant un sous-groupe distingué H tel que G/H soit cyclique de cardinal r.

1) Montrer que G a un sous-groupe K, cyclique de cardinal r. On reliera l'ordre d d'un $x \in G$ tel que $\bar{x}$ engendre G/H à r.

2)On suppose dans cette question que q et r premiers entre eux ; montrer que $\mathsf{G} = \mathsf{HK}$. Est-il possible que G ne soit pas produit direct de H et K ?

Exercice 3 :

On se donne un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) Soit $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Montrer que $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathsf{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 4 : Groupe à 147 éléments

1. Soit G un groupe de cardinal $n > 1$ et p le plus petit diviseur premier de n. Soit H un sous-groupe d'indice p de G, et $G/H = \{gH, g \in G\}$. En faisant agir H sur G/H, démontrer que H est distingué dans G.

---

1. Mais il sera bon de savoir la faire pour l'écrit donc vous pouvez la travailler a postériori

On suppose dans la suite que G est un groupe à 147 éléments.

2. Donner toutes les structures, à isomorphismes près de G, si il est abélien.
   On suppose maintenant G non abélien.
3. Déduire de la question 1) que G ne possède qu'un seul sous-groupe H à 49 éléments et établir que H est commutatif.
4. Etablir qu'il existe un élément x d'ordre 3 dans G.
5. Déterminer, en utilisant les théorèmes de Sylow, le nombre de 3-Sylows de G ; on commencera par établir qu'il ne peut être égal à 1.
6. En déduire le nombre d'éléments d'ordre 3 dans G ; existe-t-il dans G des éléments d'ordre 21 ?
7. Si on note $K =< x >$, l'élément x étant d'ordre 3, montrer que G est le produit semi-direct de H par K.
8. On suppose que H contient un élément d'ordre 49.
   (a) Etablir qu'alors $Aut(H)$ est cyclique de cardinal 42 . Combien possède-t-il d'éléments d'ordre 3 ?
   (b) Combien existe-t-il de morphismes non triviaux de K dans $Aut(H)$?
   (c) En déduire que la structure semi-directe de G est celle de $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, structure que l'on précisera.
9. On suppose que $\mathsf{H} \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$.
   (a) Etablir que le groupe N engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est un 3-Sylow de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.
   (b) Les matrices A, AB, AB^2 sont elles semblables ?
   (c) En déduire que G peut avoir 3 structures semi-directes dont on admettra qu'elles sont non isomorphes.

Exercice 5 : à propos de $\mathfrak{S}_n$.
On se propose de voir sur quelques cas particuliers si on peut toujours générer $\mathfrak{S}_n$ à l'aide de $c_n = (1, 2, \dots, n)$ et d'une transposition quelconque.

0) Redémontrer brièvement que $\mathfrak{S}_n =< c_n, (1, 2) >$.

1) On se place dans $\mathfrak{S}_4$ et on considère $G =< c_4, (1, 3) >$.
a) Vérifier que G est de cardinal 8 en établissant que c'est le centralisateur de la bi-transposition $(1, 3)(2, 4)$ dont on rappellera la classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$; Qu'en conclut-on pour notre problème ?
b) Etablir que $G \simeq \mathbb{D}_4$.
c) En déduire que tous les 2-Sylows de $\mathfrak{S}_4$ sont isomorphes à $\mathbb{D}_4$.

2) a) On se donne p un nombre premier et c_p dans $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que pour tout k, $1 \leq k \leq p-1$, c_p^k est un p-cycle que l'on précisera.
b) Plus généralement si σ est un r cycle de $\mathfrak{S}_n$, établir que σ^k est soit un r-cycle soit un produit de d cycles tous de longueur $\frac{r}{d}$, avec $d = pgcd(k, r)$.

3) On traite un cas simple avec $n = p$, p premier. On se donne, pour $j > i$ $\tau = (i, j)$, une transposition quelconque de $\mathfrak{S}_p$ et on désigne par $d = j - i$. On appelle $G_p =< c_p, \tau >$.
a) Démontrer que pour toute transposition $\tau_0 = (i_0, i_0 + d)$, il existe k de sorte que $c_p^k \tau c_p^{-k} = \tau_0$.
b) En déduire que si $d = 1$, $G_p = \mathfrak{S}_p$.

Partie B : Problème