Université de Tours– L2– Module de Géométrie
2019-2020

Deuxième session Durée : 1H30

Exercice 1 : On se place dans **le plan vectoriel euclidien.**

1) Montrer que l'expression analytique de la projection orthogonale p sur $\vec{D}$ =Vect($\vec{u}$) avec $\vec{u} = (3,4)$, si $\vec{v}$ est le vecteur de composantes (x,y) du plan, est donnée par :

$$p(\vec{v}) = p((x,y)) = (\frac{3(3x+4y)}{25}, \frac{4(3x+4y)}{25}).$$

2) En déduire celle de la symétrie s orthogonale par rapport à $\vec{D}$.

Exercice 2 :
Soit un triangle ABC non aplati. on appelle I, J et K les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$, L le milieu de $[JC]$ et M le symétrique de K par rapport à B. On se place dans le repère $\mathcal{R}$ affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
A) 1) Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de chaque point de l'énoncé après avoir effectué une figure.
2) Donner une équation de la droite (MI) et démontrer que I, L et M sont alignés.
3) Déterminer une équation de la droite (BJ) et démontrer que cette droite est parallèle à la droite (IM).

B)1)Déterminer les coordonnées barycentriques des points L et M dans le repère barycentrique lié à (A, B, C).
2) Retrouver la propriétés d'alignement des points I, L et M.
3) En utilisant l'homothétie de centre C et de rapport 2, retrouver le résultat de la question A3).

C) On suppose que l'on munit le plan du produit scalaire usuel et on prend comme origine le point A d'un répère où $B(\beta, 0)$ et $C(\gamma, \delta)$.
1) Démontrer que par les trois points A, B et C passe un unique cercle Γ.
2) Déterminer son équation cartésienne, en fonction de β, γ et δ. Quel est son rayon en fonction des paramètres ?
3) Etablir, grâce à la puissance par raport au cercle Γ, que $MI.ML = \frac{AB^2}{2}$.

Exercice 3:
Soit un triangle ABC non aplati et on désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux sur une droite Δ et on désigne par $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ les droites passant par A', B' et C' et orthogonales respectivement à (BC), (CA)$et(AB)$. Démontrer que ces 3 droites $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ sont concourantes. On choisira un repère orthonormé où $(O, \vec{\imath})$ dirige la droite Δ et on notera ainsi les coordonnées des points : $A(a, a'), B(b, b')$ et $C(c, c')$; on commencera par déterminer les vecteurs orthogonaux aux cotés du triangle.

Exercice 4

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par O' le point de coordonnées $(1, 0)$, par r la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ et par r' la rotation de centre O' et d'angle $\pi/3$; on note $f = r' \circ r$ et $g = r \circ r'$.

1) Donner l'expression analytique de r et démontrer que l'expression analytique de r' est

$$\begin{aligned} X' = & \ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{1}{2} \\ Y' = & \ \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2) a) En déduire l'expression analytique de f et g et déterminer leurs éléments géométriques (centre, angle).

b) A-t-on $f = g$?