Université de Tours– L2– Géométrie 2018-2019

Deuxième session

Exercice 1 : Déterminer toutes les matrices de $O_2(I\!R)$ telles que $M^4 = Id$ et préciser leur nature.

Exercice 2 : Soient $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ deux points distincts du plan afffine euclidien $\mathbb{R}^2$.

1- Donner une équation cartésienne de la droite (AB). Calculer la pente de cette droite en fonction des coordonnées de A et B.

2- Montrer que deux droites sont orthogonales ssi leurs pentes respectives p et p' satisfont l'équation $pp' = -1$ (on supposera que p et p' sont non nuls)

3-. Soient a, b, c trois réels distincts non nuls. On considère le triangle du plan cartésien (A, B, C) où $A = (a, 0), B = (b, 0), C = (0, c)$

4-. Donner une équation cartésienne de chacune des droites $(AB), (AC)$ en fonction de a, b et c.

5- Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) puis une équation de la hauteur du triangle passant par A.

6- En déduire que les trois hauteurs sont concourantes et calculer les coordonnées de l' orthocentre du triangle.

Exercice 3:

On se place dans le repère affine $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ de sorte que $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$.

1- Construire le point X de coordonnées barycentriques $(0, 1, 1)$ par rapport à (A, B, C) .
Puis construire le point Y de coordonnées baycentriques $(1, 2)$ par rapport à (A, X).

2- Construire le point Z de coordonnées barycentriques $(1, 1, 1)$ par rapport à (A, B, C).
Que constatez vous ?

3-Si $\beta \neq 0$, montrer que le point M de la droite (AB) est de coordonnées barycentriques (α, β) par rapport aux points A, B ssi

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}$$

4- Soit M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) , on désigne par N, P et Q , supposés distincts des points A, B et C, les points d'intersection des droites (AM) avec (BC) , (BM) avec (CA) et (CM) avec (AB).

a) Démontrer que les coordonnées barycentriques de N sont $(0, \beta, \gamma)$.

b) Donner celles de P et de Q.

c)En déduire que :

$$(*) \qquad \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QA}} = -1$$

5- Réciproquement si on a trois N, P, Q sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle et que $(*)$ est satisfaite alors les 3 droites $(AN), (BP)$ et (CQ) sont concourantes. On pourra introduire le point M' intersection de (AN) et (BP) et ses coordonnées barycentriques.

Exercice 4 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par O' le point de coordonnées $(1, 0)$, par r la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ et par r' la rotation de centre O' et d'angle $\pi/3$; on note $f = r' \circ r$ et $g = r \circ r'$.
1) Donner l'expression analytique de r et démontrer que l'expression analytique de r' est

$$\begin{aligned} X' &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{1}{2} \\ Y' &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2) En déduire l'expression analytique de f et g et déterminer leurs éléments géométriques (centre, angle). A-t-on $f = g$?
3) a) Etablir que si on note A le point $f(O)$ alors $A = r'(O)$ et en déduire une construction de A .
b) Caractériser *géométriquement* le point B tel que $f(B) = O'$.
c) En déduire une construction du centre de f parès avoir construit A et B. Faire une figure.

Exercice 5 Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{P}$. On note I Ie milieu de $[BC]$, J Ie milieu de $[CA]$ et K Ie milieu de $[AB]$. Soient Ω un point de $\mathcal{P}$ et h l'homothétie de rapport 2 et de centre Ω . On note

$$I' = h(I), J' = h(J) \quad \text{et } K' = h(K).$$

1) Faire une figure soignée.
2) Que sait-on du triangle $I'J'K'$? on établira que les droites (BC) et $(J'K')$ sont parallèles comme les droites (CA) et $(K'I')$, et les droites (AB) et $(I'J')$ et que les les longueurs des cotés vérifient

$$BC = J'K', \quad CA = K'I', \quad AB = I'J'$$

3) Montrer que les droites $(AI'), (BJ')$ et (CK') sont concourantes.