# Contrôle Continu terminal du Janvier 2019

Durée : 2 h

**Calculatrices et matériels électroniques interdits**

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction compte pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie et que les réponses non justifiées n'ont pas de valeur. Les notation sont celles du cours.*

**Questions de Cours**

1. Donner deux preuves du fait que par trois points non alignés passe un unique cercle.
2. Exprimer de deux façons équivalentes le fait que, dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$, $G$ est le barycentre des points massiques $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$.
3. Démontrer que l'image $G' = f(G)$ par une application affine $f$ du barycentre $G = Bar((A_i, \lambda_i)_{i\in I})$ est le barycentre $Bar((f(A_i), \lambda_i)_{i\in I})$ des points massiques images $f(A_i)$ affectés des mêmes coefficients. On rappellera la définition d'une application affine de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 1.**

On se place dans le plan vectoriel euclidien.

1. Démontrer que le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 3\alpha - 4\beta & = x \\ 4\alpha + 3\beta & = y \end{cases},$$
admet une unique solution que l'on donnera en utilisant les formules de Cramer.
2. Montrer que l'expression analytique de la projection orthogonale $p$ sur $\vec{D}$ =Vect($\overrightarrow{u}$) avec $\overrightarrow{u} = (3, 4)$, si $M$ est le point de coordonnées $(x, y)$ du plan, est donnée par $p(x, y) = (\dfrac{3(3x + 4y)}{25}, \dfrac{4(3x + 4y)}{25})$. On pourra utiliser la question 1).
3. En déduire celle de la symétrie $s$ orthogonale par rapport à $\vec{D}$.

**Exercice 2.** Dans le plan affine, on considère trois points $A$, $B$ et $C$ non alignés. On désigne par $A'$ le milieu du segment $[BC]$, $B'$ celui du segment $[CA]$ et $C'$ celui du segment $[AB]$. Soit $M$ un autre point, de coordonnées $(\alpha, \beta)$ dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan ; on appelle $D_A$ la droite paralléle à la droite $(MA')$ passant par $A$, $D_B$ la droite paralléle à la droite $(MB')$ passant par $B$ et $D_C$ la droite parallèle à la droite $(MC')$ passant par $C$.
Etablir que ces trois droites sont concourantes. On commencera par donner les coordonnées des points $A', B'$ et $C'$ dans $\mathcal{R}$ , puis on trouvera une équation de chacune des droites en écrivant que $P(x, y) \in D_A$ si et seulement si $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MA'})$ forme une famile liée...etc .
On fera aussi une figure soignée en prenant $M$ intérieur au triangle.

Tournez S.V.P.

**Exercice 3.** On se place dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O, , \vec{\jmath})$

1. a) Etant donné un point $I$ du plan affine euclidien, on considère la symétrie ponctuelle par rapport à $I$ définie , si on note $M' = s_I(M)$ , par $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$. Démontrer que $s_I$ est une isométrie affine . A quelle(s) famille(s) de transformations affines bien connues appartient-elle ?
   b) Donner l'expression analytique de $s_I$ dans le repère $(O, , \vec{\jmath})$ si $I = (a, b)$.

2. On considère deux points $P$ et $P'$ distincts. Soient $\alpha$ et $\alpha'$ deux réels tels que $\alpha + \alpha' = 1$ et $M$ le barycentre de $(P, \alpha)$ et $(P', \alpha')$.
   a)Démontrer que $P'$ est barycentre de $(M, 1)$ et $(P, -\alpha)$.
   b) Si $M'$ désigne le symétrique de $M$ par rapport à $I$ milieu du segment $[PP']$, établir que $M'$ est le barycentre de $(P', \alpha)$ et $(P, \alpha')$.

3. On considère $r_1$ la rotation de centre $I(\sqrt{3}, 0)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et $r_2$ celle de centre $J(0, 1)$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.
   a) De quelle nature est la transformation $g = r_2 \circ r_1$ ? Précisez ses éléments caractéristiques. On pourra considérer $I" = g(I)$.
   b) Démontrer que si $(X_1, Y_1)$ désigne les coordonnées de l'image $r_1(M)$ du point $M(x, y)$ dans $(O, , \vec{\jmath})$, l' expressions analytique de la rotation $r_1$ dans le repère considéré est :

$$\begin{aligned} X_1 = &\ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Y_1 = &\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

   c) Donner l'expression analytique de la rotation $r_2$ et retrouver le résultat de la question a).

4. Soit $ABC$ un triangle non aplati du plan affine euclidien .
   On considère la transformation $f = r_C \circ r_B \circ r_A$ où $r_A$(resp. $r_B$ et $r_C$ ) désigne la rotation de centre $A$ et d'angle $\hat{A} = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ (resp.de centre $B$ et d'angle $\hat{B} = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et de centre $C$ et d'angle $\hat{C} = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$). Démontrer qu'il existe un point $\Omega$ de sorte que $f$ soit la symétrie ponctuelle $s_\Omega$.

5. On suppose dans cette question que le triangle est $ABC$ équilatéral ; on désigne par $C' = r_B(A)$, $A' = r_C(B)$ et $B' = r_A(C)$.
   a)En calculant les images des points $A, B, C$ par $f$ , déterminer dans ce cas-là, le point $\Omega$ de la question précédente.
   b) Démontrer que les droites $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes. On demande une figure.