Université de Tours
2018 – 2019

Géométrie élémentaire L2S3

Examen du 8 Novembre 2018

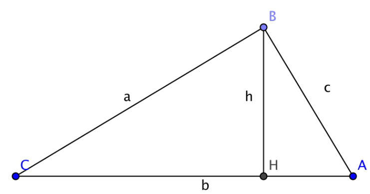
Durée : 2 h

On supposera dans tous les exercices que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire euclidien et de la distance euclidienne. On notera par u_θ le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. On notera par $O(2)$ le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

1. Enoncer et démontrer le Théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^2$ vectoriel.
2. Compléter la proposition : le triangle ABC du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est rectangle en B si et seulement si .... Démontrer cette proposition.
3. En utilisant le théorème de Pythagore dans les différents triangles rectangles de la figure, démontrer les différentes relations entre distances :

$$h^2 = BH^2 = AH\ HC, \quad a^2 = b\ HC, \quad c^2 = b\ AH.$$



4. On ne dispose que d'un compas et d'une règle. Comment construire la figure ?

Exercice 2.

1. Soit $v = (3,4)$ et $w = (-20,15)$; montrer que $\{v, w\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $||v + w|| = ||v - w||$.
3. Trouver les composantes du vecteur $(-7,74)$ dans la base $\{v, w\}$.
4. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que $||v_1|| = ||v_2|| \neq 0$.
   Montrer que $v_1 - v_2$ est orthogonal à $v_1 + v_2$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\{u_0, u_{\pi/2}\}$.

1. Déterminer les matrices respectives des rotations R_1 et R_2 telles que $R_1(u_0) = u_{\pi/6}$ et $R_2(u_0) = u_{\pi/4}$
2. Donner la définition de l'angle orienté de vecteurs $< \widehat{u_{\pi/6}, u_{\pi/4}} >$ et préciser une mesure de cet angle.
3. Montrer que $R_1^{-1} \circ R_2$ est une rotation. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.
4. Proposer toutes les méthodes que vous connaissez pour calculer $\cos(5\pi/12)$.

Exercice 4. On considère l'ensemble S des 4 vecteurs suivants :

$$S := \{s_1 = (1,1), s_2 = (-1,1), s_3 = (-1,-1), s_4 = (1,-1)\}$$

1. Soit $u \in End(\mathbb{R}^2)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(s_i) = s_i \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$. Montrer alors que $u = Id$.
2. Donner la forme générale d'une matrice de symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ et en déduire celle de la symétrie orthogonales qui transforme s_1 en s_2.
3. Soit $u \in End(\mathbb{R}^2)$ tel que $u(S) = S$. Montrer alors que $u \in O(2)$.
   On notera par $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces isométries.
4. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de $O(2)$.
5. Montrer que $\mathcal{C} \cap O(2)^+$ est un sous-groupe cyclique de 4 éléments.
6. Décrire $\mathcal{C}$.